

Neue Wege zu attraktivem Mathematikunterricht

Ein Bericht aus der Lehramtsausbildung Sekundarstufe im Verbund Lehrer*innenbildung West

Martin Andre, Rene Auer, Katharina Birnbaumer, Lukas Bodner, Judith Flatscher, Dominik Gfall, Simone Glas, Johannes Härting, Lea Holaus, Stefanie Joas, Elisa Kreiner, Marcel Lanzasanto, Leonie Lukasser, Salih Satik, Vivienne Scheiblauber, Lisa Scheurer & Magdalena Steuxner

*Neue technologische Möglichkeiten verändern die moderne Gesellschaft von Grund auf. Diese Entwicklungen bringen vielfältige Chancen aber auch Herausforderungen und Hürden für Schule und Unterricht. Speziell Mathematikunterricht kann durch gezielten Technologieeinsatz stark an Attraktivität gewinnen, zumal sich mit zunehmender Technologisierung Räume für breitgefächerte Inhalte und den Erwerb zusätzlicher Kompetenzen eröffnen. Eine umfassende und rapide Veränderung des Lernens und Lehrens von Mathematik ist aber eine große Herausforderung für Lehrpersonen. Dahingehend kann aktuelle Forschungsliteratur (werdende) Lehrer*innen in ihrer individuellen Professionalisierung unterstützen. Als Ergebnis eines Seminars der Lehramtsausbildung im Verbund West wollen wir in diesem Artikel aufzeigen, wie ausgewählte fachdidaktische Literatur nutzbringend für den Mathematikunterricht aufgearbeitet werden und diesen auf vielfältige Weise bereichern kann. Dazu werden nach einem Vorwort 16 Artikel zu Themen wie 3D-Druck, Flipped Classroom, Robotik oder Augmented Reality vorgestellt und Ideen zur Umsetzung im Unterricht präsentiert.*

Schlagwörter: Technologieeinsatz, Lehrer*innenbildung, fachdidaktische Forschungsliteratur

Vorwort

Mit rapiden technologischen Weiterentwicklungen in unserer Gesellschaft veränderte sich auch das Lernen und Lehren von Mathematik in den vergangenen Jahrzehnten grundlegend. Der Einsatz neuer Technologien brachte vielfältige Möglichkeiten, den mathematischen Kompetenzbegriff zu erweitern. Das Operieren konnte oft durch digitale Anwendungen vereinfacht werden und so entstanden neue Perspektiven für die umfassende und tiefgehende Behandlung von Inhalten abseits von prozeduralem Arbeiten oder dem Trainieren von Rechentechniken. Diese Entwicklung birgt bis heute immense Chancen für eine Attraktivierung des Mathematikunterrichts,

in dem neben der Fachlichkeit weitere Aspekte guten Unterrichts wie etwa die inhaltliche und methodische Vielfalt, horizontale und vertikale Vernetzung, Authentizität oder Sinnstiftung (Barzel et al., 2017) ihren Platz finden. Mit der eingeleiteten Neudefinition des Kompetenzbegriffs entstanden aber auch neue Herausforderungen und Hürden. Modellierungstätigkeiten anzuleiten, eigenständige Interpretationen mathematischer Inhalte durch Schüler*innen zu begleiten oder Argumentationen anzuregen und dabei Technologie als integralen Bestandteil des Lernens zu forcieren, erfordert eine hohe Expertise der Lehrkräfte. Seit dem Jahr 2006 hat die Kompetenz von Lehrpersonen, technologisches, fachliches und fachdidaktisches Wissen zu verknüpfen, als TPACK (*Technological Pedagogical Content Knowledge*) Eingang in Forschung und Fachliteratur gefunden (Mishra & Koehler, 2006). Nach dem TPACK-Modell entsteht im Zusammenspiel dieser drei Wissensfacetten die Expertise der Lehrperson, den Kompetenzerwerb von allen Schüler*innen im Spannungsfeld zwischen Inhalt und Technologieeinsatz bedacht zu fördern. Dahingehend sind auch Studien von Luc Trouche oder Paul Drijvers bahnbrechend, die den technologischen Kompetenzerwerb von Lernenden in Mathematik detailliert untersuchen (z.B. Trouche, 2004; Drijvers et al., 2010). Weinhandl et al. (2023) leisten einen Beitrag zur Differenzierung dieser Theorien, indem sie fünf archetypische Schüler*innen in ihrem Umgang mit Technologie im Mathematikunterricht sowie in ihren Erwartungen und Bedürfnissen dazu charakterisieren. Weit über diese wenigen, zitierten Werke hinausgehend, deutet die immense Zahl an Forschungsarbeiten zum Technologieeinsatz im Mathematikunterricht darauf hin, dass einerseits die Relevanz des Themas stetig steigt; es zeigt sich aber andererseits, dass Forschung in diesem Bereich oft noch am Anfang steht. Ein wesentlicher und nicht nur für diesen Artikel zentraler Umstand ist, dass ein weiter Teil der Forschungsliteratur den gewinnbringenden Einsatz von Technologie im Mathematikunterricht beschreibt und

damit Grundlage für tiefere und umfassendere Erkenntnisse bietet. Mit dem Anspruch, dass Mathematikunterricht die Welt erfahrbar machen soll und nutzbringend für Schüler*innen ist, entstanden diesbezüglich in den vergangenen Jahren vermehrt auch Arbeiten, die die strengen fachlichen Grenzen des Mathematikunterrichts in Frage stellen und andere Bereiche, wie Naturwissenschaft, Technik, Informatik oder auch Kunst, zu integrieren versuchen (z.B. Maass, Geiger et al., 2019). All diese Entwicklungen zeigen, wie es im Wandel der Gesellschaft möglich ist, neue Wege im Mathematikunterricht zu beschreiten, und Schüler*innen beim Aufbau adäquater und vernetzter Kompetenzen zu unterstützen, die für ein Leben in der Gesellschaft des 21. Jahrhunderts unverzichtbar sind.

Wege zu attraktivem Mathematikunterricht

Unter Bedachtnahme auf die gesellschaftlichen Entwicklungen wurde die Ausbildung zukünftiger Mathematiklehrer*innen in Österreich in den vergangenen zehn Jahren mit der Einteilung der beteiligten Institutionen zu gemeinsamen Verbänden und der Reform der Curricula neu organisiert. Im gemeinsamen Curriculum der Bundesländer Tirol und Vorarlberg für das Masterstudium im Fach Mathematik findet sich ein Seminar zur Analyse fachdidaktischer Forschung. Ziel dieser Lehrveranstaltung ist es, Studierende im Erkenntnisgewinn zu unterstützen, dass fachdidaktische Forschungsliteratur Quelle der Inspiration und der Weiterentwicklung des eigenen Unterrichts sein kann und sie im Hinblick auf ihre berufliche Zukunft darin zu unterstützen, diesen Baustein der individuellen Professionalisierung aktiv zu forcieren. Die Lehrveranstaltung steht unter dem Motto, moderne Inhalte wissenschaftlich fundiert im eigenen (zukünftigen) Mathematikunterricht zu verankern.

Resultierend aus der Arbeit der Studierenden in diesem Seminar werden 16 Artikel vorgestellt, die in unseren Augen das Potential besitzen, eine Attraktivierung des Mathematikunterrichts anzuregen. Die folgenden Einzelbeiträge beinhalten jeweils eine Kurzinformation und Zusammenfas-

sung des Forschungsartikels, Umsetzungsideen für den Unterricht sowie Erklärungen der Studierenden, inwiefern die beschriebene Umsetzung den Unterricht bereichern kann.

Robotik

Der Artikel von Albert Valls Pou, Xavi Canaleta und David Fonseca mit dem Titel *Computational Thinking and Educational Robotics Integrated into Project-Based Learning* wurde in der Zeitschrift *Sensors* veröffentlicht. Valls Pou et al. (2022) beschreiben darin positive Effekte, die eine Integration von *Robotik* und *Computational Thinking* in den offiziellen Lehrplan mit sich bringen. Neben der Stärkung von digitalen Kompetenzen werden 21st-Century-Skills wie Kreativität, Kommunikation, kritisches Denken und Problemlösefähigkeiten gefördert. Die Ergebnisse der Studie zeigen, dass der Aufbau dieser Kompetenzen besonders in aktiven Lernformen wie beispielsweise projektbasiertem Lernen begünstigt wird. Zusätzlich werden Performance und Motivation von Schüler*innen gesteigert. Die Autoren betonen zudem, dass die Verwendung visueller Programmierplattformen wie Scratch oder LEGO-Mindstorms das Erlernen des Programmierens erleichtern. Aufgrund der einfachen Anwendung sowie der Interaktion und des direkten Feedbacks sind Roboter geeignete Tools für Primar- und Sekundarstufe. Der Einsatz von Robotern im Mathematikunterricht eröffnet neue Wege, einen motivierenden, sinnstiftenden und mit den grundlegenden Konzepten der Informatik vernetzten Unterricht zu gestalten. Robotik konfrontiert Lernende auch mit Naturwissenschaft, Technik und Kunst, weshalb sich eine Einbettung in fächerübergreifende Projekte im MINT-Bereich anbietet.

Origami

Der Artikel *Two Solutions to an Unsolvable Problem: Connecting Origami and GeoGebra in a Serbian High School* von Kristof Fenyvesi, Natalija Budinski und Zsolt Lavicza wurde in den *Proceedings of Bridges 2014: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* publiziert. Darin beschreiben Fenyvesi et al. (2014) wie die Lösung des antiken Problems der Konstruktion eines Würfels, der das doppelte Volumen eines gegebenen

Würfels haben soll, mit GeoGebra durch den Schnitt zweier Parabeln oder mittels Origami im Unterricht umgesetzt werden kann. Anleitungen zu den zwei unterschiedlichen Lösungen des Problems (vgl. in Abbildung 1 die Origami-Lösung) wurden in Gruppen geprüft und mit dem Ziel diskutiert, im Plenum die Beweisfindung zu präsentieren. Auch die Dreiteilung des Winkels kann mit Origami oder durch den Schnitt von Parabel und Kreis, aber nicht mit Zirkel und unmarkiertem Lineal gelöst werden. Die vorgestellten Beweise können in der Sekundarstufe II umgesetzt und mit einer mathematik-historischen Diskussion zu den Grenzen der euklidischen Geometrie verbunden werden.

In der Sekundarstufe I können gefaltete geometrische Formen wie Dreieck oder Viereck und modulares Origami den Unterricht bereichern, bei dem durch Zusammenstecken mehrerer gleicher Papierformen geometrische Körper wie Würfel oder Dodekaeder entstehen. Daran können deren Eigenschaften besprochen, veranschaulicht und mit digitalen Lösungen verglichen werden. Alles in allem stellt Origami eine Bereicherung des Unterrichts dar, da das Produkt haptisch entsteht und fassbar ist. Mathematische Begriffe lassen sich gut mit den Faltschritten verbinden und mit gezielten Aufgabenstellungen auch räumliche Argumentation oder die Entdeckung von Symmetrieeigenschaften verschiedener Faltungen fördern.

3D-Druck im Mathematikunterricht

Der Artikel *Opportunities for 3D printing in Hybrid Education* wurde im Jahr 2022 von Natalija Budinski, Zsolt Lavicza und Tony Houghton in der Zeitschrift *Open Education Studies* publiziert.

Budinski et al. (2022) führen in ihrer Studie eine Unterrichtssequenz zum Thema Raumgeometrie mithilfe des 3D-Druckers durch. Ziel der Studie ist die Schaffung eines Ansatzpunktes zur Implementierung des 3D-Drucks im Klassenzimmer. Anhand von GeoGebra modellierten Lernende einen Tetraeder und druckten diesen anschließend aus. Sowohl korrekt als auch falsch konstruierte Modelle halfen Schüler*innen beim Verständnisprozess und unterstützten so ihr Lernen.

Wie Bundinski et al. (2022) beschreiben, kann der 3D-Drucker eingesetzt werden, um geometrische Körper und Formen zu visualisieren und damit deren Charakteristika besser zu verstehen. Eine weitere Einsatzmöglichkeit ist das Konstruieren von Modellen realer Gegenstände, wodurch mathematische Konzepte, wie Proportionalität, Skalierung oder Symmetrie greifbar gemacht werden. Es können auch mathematische Spielgeräte, wie etwa verschiedenartige Spielwürfel oder verschiedenartige Würfel, erstellt werden, um Gewinnwahrscheinlichkeiten zu ermitteln. Darüber hinaus kann der 3D-Drucker im fächerübergreifenden Unterricht zur Anwendung kommen. So kann etwa in Kombination mit Biologie, Physik oder Chemie ein Modell eines Moleküls oder im Zuge eines Experiments ein Modell eines Pendels erstellt werden. Auf diese Weise eröffnet 3D-Druck einen haptischen Zugang zum Lerninhalt und ermöglicht einen vertieften Umgang mit mathematischer Software wie GeoGebra oder einfachen CAD-Programmen wie *Tinkercad*. Insgesamt ergeben sich mit der Integration des 3D-Druckers in den Mathematikunterricht vielfältige Möglichkeiten, Problemlösefähigkeiten, räumliches Denken, Kooperativität und Kreativität zu fördern.

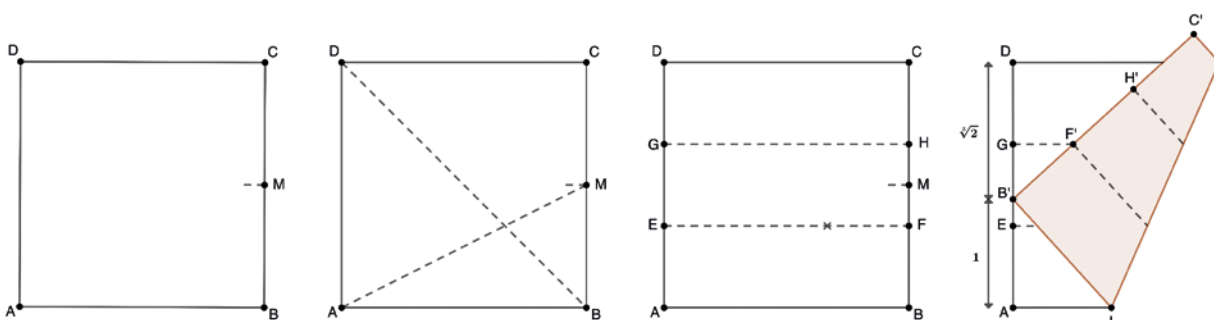


Abbildung 1: Faltanleitung zur Origami-Lösung der Würfelverdupplung (eigene Darstellung nach Fenyvesi et al., 2014)

FotoGebra

Der Artikel aus dem Jahr 2019 von Karina Rizzo, Laura del Río, Mónica Manceñido, Zsolt Lavicza und Tony Houghton mit dem Titel *Linking Photography and Mathematics with the Use of Technology* wurde in der Zeitschrift *Open Education Studies* publiziert. Darin zeigen Rizzo et al. (2019), wie Fotografie, Kunst und Architektur mit Mathematik verknüpft werden können, und durch den Einsatz von Technologie den Unterricht bereichern können. FotoGebra ist ein Wettbewerb, bei dem Lernende mathematische Aspekte von komplexen realen Gegenständen anhand selbst erstellter Fotos technologiegestützt mit GeoGebra analysieren. Gefördert werden kreatives und eigenständiges Denken bei der Findung individueller Lösungen. Ziel ist es, mathematische Fähigkeiten von Schüler*innen zu verbessern, indem gezielte Beobachtungen der Umwelt angeregt und Fragen sowie Lösungsstrategien zu Vorgängen in der Umgebung entwickelt werden.

Viele mathematische Themengebiete lassen sich mit dem Alltag verknüpfen, wodurch auf unterschiedliche Interessensfelder von Schüler*innen eingegangen werden kann. So kann die Breite eines Flusses, die Höhe eines Baumes oder die Form einer örtlichen Brücke sehr einfach anhand eines Fotos in GeoGebra importiert und hinsichtlich diverser mathematischer Aspekte etwa über die Fachbereiche Geometrie oder funktionale Abhängigkeiten erforscht werden. Durch kooperatives Lernen wird zudem die Teamfähigkeit gefördert. Insgesamt erscheint der Ansatz wertvoll, um Lernende in ihrer Wahrnehmung der Umwelt durch die Brille der Mathematik zu fördern.

Augmented Reality

Der Konferenzbeitrag aus dem Jahr 2020 von Julia Wolfinger, Janis Ahrer, Alicia Hofstätter und Markus Hohenwarter mit dem Titel *Möglichkeiten von Augmented Reality in der GeoGebra 3D Rechner App* wurde auf der 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik in Würzburg vorgestellt. Darin beschreiben Wolfinger et al. (2020) in verschiedenen Beispielen den Einsatz von Augmented Reality mithilfe der GeoGebra

3D Rechner App. Durch die App können virtuelle Objekte in der Realität platziert, modelliert und durch Bewegen des Endgerätes aus verschiedenen Perspektiven erforscht werden, wobei im Anschluss ausführliche mathematische Auseinandersetzungen mit dem Objekt erfolgen können.

Online zugängliche GeoGebra Bücher bieten Kurzanleitungen und Kurzvideos für Lehrpersonen und Schüler*innen zur Umsetzung im Unterricht an. Darüber hinaus finden sich auf der Homepage von GeoGebra eine Vielzahl an vorgefertigte Materialien in den Bereichen Algebra, Geometrie und Analysis, die im Unterricht in unterschiedlichsten Schulstufen der Sekundarstufe interaktiv eingegliedert werden können. Dadurch können Lernende beispielsweise verschiedenste geometrische Figuren aus der realen Welt untersuchen oder auch Sachverhalte zum dreidimensionalen Koordinatensystem erarbeiten. *Augmented Reality* eröffnet Chancen für den Unterricht, eine schüler*innenzentrierte, forschende, offene und kooperative Lernumgebung zu schaffen, mit der dreidimensionale Zusammenhänge erfasst und das Vorstellungsvermögen sowie das räumliche Denken von Lernenden gestärkt werden können. Außerdem werden in der eigenständigen Erkundung der augmentierten Realität durch Schüler*innen deren Lernprozesse durch die individuelle Entwicklung von Strategien oder den Austausch in fachlichen Diskussionen in den Vordergrund gestellt.

Photomath

Der im Journal *Middle European Scientific Bulletin* veröffentlichte Artikel *Challenges in Human-Computer Interaction on the Example of Photomath Mobile Application* von Mariam Zakariashvili aus dem Jahr 2021 behandelt die Mensch-Computer-Interaktion am Beispiel der kostenlosen App *Photomath*. Die Autorin stellt darin eine Studie vor, die die Nutzung von *Photomath* durch Lernende untersucht. Mithilfe der App können mathematische Probleme gelöst werden. Dazu schießt man ein Foto der Aufgabe, woraufhin *Photomath* diese scannt und löst. Besonders ist, dass einer oder mehrere Lösungswege schrittweise angegeben werden. Die App erkennt gedruckte sowie handschriftliche Aufgaben.

Die aktiv forcierte Verwendung von *Photomath* im Unterricht eignet sich einerseits für Übungsphasen. Schüler*innen können gelöste Aufgaben selbstständig kontrollieren und etwaige Fehler in ihren Rechenwegen finden, da das richtige Ergebnis sowie Lösungswege in der App angegeben werden. Zudem können Denkanstöße bei der Verwendung der App Schüler*innen beim Üben unterstützen. Andererseits kann *Photomath* in Erarbeitungsphasen eingesetzt werden, um gezielt verschiedene Lösungswege zu analysieren, zu vergleichen und zu bewerten, oder um in Phasen des forschenden Lernens Inhalte mit eingeplanten Hilfestellungen selbstständig zu erarbeiten. Da *Photomath* laut der Untersuchung von Zakariashvili (2021) sehr benutzerfreundlich ist, ist die Einführung der App auch einfach umzusetzen.

Lineare Gleichungen – Dragonbox App

Der Konferenzbeitrag von Hans-Georg Weigand, Guido Pinkernell und Alexander Schüler-Meyer am *Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME12)* aus dem Jahr 2022 mit dem Titel *Basic mental models of equations – Theoretical conception and practical meaning* gibt einen Überblick über die Grundvorstellungen zu Gleichungen und die Wechselbeziehung zwischen diesen Grundvorstellungen und dem Einsatz digitaler Technologien im Lösungsprozess.

Der Aufbau von Grundvorstellungen zum Lösen von linearen Gleichungen kann im Unterricht etwa durch den gezielten Einsatz der Lernapp *DragonBox Algebra 12+* ermöglicht werden. Die Lernapp kann Schüler*innen unterstützen, das Thema der linearen Gleichungen intuitiv und spielerisch zu erarbeiten. Um die App sinnvoll in einen Unterricht zu integrieren, der forschendes und entdeckendes Lernen ermöglicht, ist die Erstellung eines begleitenden Arbeitsblattes erforderlich. Dieses soll parallel zum Lernspiel Lernende beim mathematischen Kompetenzaufbau unterstützen, der Ergebnissicherung dienen und inhaltliche Reflexion zum Lösen von Gleichungen fördern. Damit kann die App *DragonBox* die algebraischen Denkhaltungen der Schüler*innen sichtbar machen, was sowohl für Lehrpersonen

als auch für Lernende einen Mehrwert bieten kann. Zudem kann die spielerisch aufgebaute App die Lernmotivation steigern und daher zur Attraktivierung des Unterrichts beitragen.

Statistische Fragestellungen entwickeln

Der Artikel *What Makes a Good Statistical Question?* von Pip Arnold und Christine Franklin wurde 2021 im *Journal of Statistics and Data Science Education* publiziert. Der statistische Forschungskreislauf besteht aus vier Phasen: (1) der Entwicklung der Fragestellung, (2) der Datenerhebung, (3) der Datenanalyse und (4) der Beantwortung der Frage. Um Statistik nachhaltig zu lernen, sollen Schüler*innen den gesamten Forschungskreislauf aktiv im Sinne des genetischen Prinzips in einer Lernumgebung durchlaufen, die forschendes und entdeckendes Lernen durch den Einsatz von Technologie forciert. In ihrem Artikel stellen Arnold und Franklin (2021) verschiedene Arten von statistischen Fragestellungen vor, die einerseits am Beginn des Forschungsprozesses stehen und andererseits den Forschungsprozess durchgehend begleiten. Zudem werden entwickelte Qualitätskriterien vorgestellt, die eine gute statistische Forschungsfrage ausmachen.

Das Umsetzen des statistischen Forschungskreislaufs im Unterricht – von der Forschungsfrage über die Datenerhebung mittels Fragebogen bis hin zur Datenanalyse – kann einen wesentlichen Beitrag zur Grunderfahrung von Schüler*innen leisten, Phänomene der Natur, der Gesellschaft und der Kultur zu entdecken. Dabei können konkrete Fragestellungen von Schüler*innen aufgegriffen und interdisziplinäres Arbeiten mit anderen Unterrichtsfächern gefördert werden. Der Prozess kann auch durch bereits vorhandene Erhebungen eingeleitet werden und Lernende formulieren basierend darauf ihre Fragen. Wesentlich ist, dass Lehrpersonen die Weiterentwicklung der anfänglichen Fragestellung hin zu einer guten statistischen Forschungsfrage, die sich durch Daten beantworten lässt, begleitet. Der vorgestellte Artikel bildet dafür eine fundierte theoretische Basis.

Statistische Untersuchungen mit TinkerPlots

Erschienen im von Wassong und anderen 2014 herausgegebenem Sammelband *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using Tools for Learning Mathematics and Statistics*, widmen sich Dani Ben-Zvi und Tali Ben-Arush im Artikel *EDA Instrumented Learning with TinkerPlots* dem forschend-entdeckenden Lernen beim Umgang mit multivariaten Daten. Anhand des Arbeitsprozesses mit der Software TinkerPlots beschreiben die Forscher*innen, wie es gelingen kann, ein für Lernende zunächst unbekanntes Instrument zur Datenverarbeitung in ein hilfreiches Werkzeug zur Durchführung und Auswertung statistischer Untersuchungen zu verwandeln. Ihr präsentierter Weg von unsystematischen Anordnungen bloßer Punkte, über die Schaffung einer systematisierten Datenlage, hin zu profundem Hantieren mit der zu Grunde liegenden Stichprobe zeigt, dass ein Selbsterkunden sowie Ausprobieren des technologischen Hilfsmittels und ein Austausch unter Lernenden besonders lernförderlich sind.

Bereits zu Beginn der Sekundarstufe gibt es Anknüpfungspunkte für die eigene Unterrichtstätigkeit. Im Zuge von Kennenlerneinheiten zu Jahresbeginn können basierend auf statistischen Fragestellungen schüler*innenspezifische Daten in TinkerPlots implementiert, analysiert und diskutiert werden. Problemstellungen wie *Die Fußstapfen der Großen – mögliche Zusammenhänge zwischen Geschwisteranzahl und Schuhgröße?* wecken nicht nur Neugierde, sondern eröffnen Möglichkeiten zur Umsetzung eines statistischen Forschungskreislaufs. Lediglich eine kurze Einführung in das kostenpflichtige Programm ist notwendig, ein Selbsterkunden in Kleingruppen vordergründig. Andere kostenfreie Datenanalyseprogramme wie CODAP oder Gapminder können als Alternative herangezogen werden. Damit kann Statistik nicht nur als Lückenfüller am Schuljahresende angesehen werden, sondern als roter Faden in der Sekundarstufenzeit einen relevanten Beitrag zur Welterfassung leisten.

Aktive Citizenship

2019 wurde unter dem Titel *Promoting active citizenship in mathematics teaching* im Journal *ZDM – Mathematics Education* von Katja Maass,

Michiel Doorman, Vincent Jonker und Monica Wijers eine interdisziplinäre, internationale Design-Forschungsstudie namens MaSDiV vorgestellt, deren vorläufige Forschungsprodukte aus Lehr- und Weiterbildungsmaterialien bestehen. Im Zentrum stehen dabei Fragestellungen zu sozial relevanten Themen, die im Mathematikunterricht mit diversen Methoden und Medien erforscht werden können. Schüler*innen sollen sich eine faktenbasierte, kritische, reflektierte Meinung zu konträren Fragestellungen unserer Zeit bilden, etwa zu Themen wie dem Kauf fair produzierter Schokolade, der Ernährung der Weltbevölkerung oder der Installation alternativer erneuerbarer Energieformen. Im Zentrum der Lernprozesse stehen Entscheidungsfindungen durch Fakten, mathematische Modelle und wissenschaftliche Methoden in Abstimmung mit sozialen, moralischen und ethischen Aspekten. Der Mathematikunterricht des 21. Jahrhunderts soll Schüler*innen in unseren Augen genau auf diese Thematiken vorbereiten, damit Wege in eine nachhaltige Zukunft gebaut werden können. Über einzelne oder mehrere Unterrichtseinheiten reichende konkrete Unterrichtsmaterialien und -ideen können auf der Projekthomepage von MaSDiV zur direkten Verwendung im Unterricht heruntergeladen werden.

Fermi-Probleme

Der Artikel von Jonas Bergman Ärlebäck und Lluís Albarracín mit dem Titel *The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty first century competencies* wurde im Juli 2019 in der Zeitschrift *ZDM – Mathematics Education* online veröffentlicht. Darin präsentieren die Autoren Forschungsergebnisse zum Einsatz von Fermi-Problemen in den MINT-Fächern (Mathematik, Informatik, Naturwissenschaften und Technik) und erläutern, wie diese im Unterricht umgesetzt werden können. Fermi-Probleme sind offene Fragen, die auf Schätzungen und Annahmen basieren und keine exakten Antworten verlangen. Sie erfordern kritisches Denken und Problemlösungsfähigkeiten sowie kreative und flexible Denkweisen. Untersuchungen ergaben durchwegs positive Lernergebnisse, insbesondere in den Bereichen Schätzen, Zahlverständnis, Problemlösung und Modellierung.

Wenn Schüler*innen Fermi-Aufgaben lösen, arbeiten sie in Kleingruppen und erstellen selbstständig Modelle und Lösungen. Die Ergebnisse der Aufgaben können oft experimentell überprüft werden, wie zum Beispiel das Abschätzen oder näherungsweise Berechnen des Volumens eines unregelmäßigen Körpers, welches z.B. durch Wasserverdrängung in einer Badewanne nachgemessen werden oder durch Recherchen im Internet ergänzt werden kann. Fermi-Aufgaben können den Unterricht bereichern, indem Schüler*innen lernen, ein Problem in mehrere Teilprobleme zu zerlegen und näherungsweise Modelle für die Realität zu erstellen. Aufgrund ihrer offenen Natur können Fermi-Probleme auch dazu beitragen, das Interesse von Schüler*innen an MINT-Disziplinen zu wecken und ihr Verständnis für komplexe Konzepte zu vertiefen. Zusammengefasst zeigt sich, dass die Anwendung von Fermi-Problemen im Unterricht ein wertvolles Werkzeug für Lehrende ist, um Schüler*innen auf die Herausforderungen des 21. Jahrhunderts vorzubereiten.

Interaktive Schulbücher

Der Artikel *Design and research potential of interactive textbooks: the case of fractions* aus dem Jahr 2018 von Stefan Hoch, Frank Reinhold, Bernhard Werner, Jürgen Richter-Gebert und Kristina Reiss wurde in der Fachzeitschrift *ZDM – Mathematics Education* publiziert. Er greift das Gestaltungs- und Forschungspotenzial interaktiver Schulbücher im Unterricht auf. Hoch et al. (2018) beschreiben, welche Aspekte für die Entwicklung eines interaktiven Schulbuchs eine entscheidende Rolle spielen müssen, um Lernprozesse von Schüler*innen zu unterstützen. Interaktive Übungen, adaptive Anforderungen und automatische Feedbacks sind entscheidende Eigenschaften, die einen positiven Effekt digitaler Schulbücher auszeichnen. Das im Artikel vorgestellte interaktive Schulbuch *ALICE:fractions* soll am Beispiel der Einführung von Brüchen die Umsetzung digitaler Lernumgebungen im Unterricht erläutern und folglich den Nutzen hinsichtlich des Lernprozesses evaluieren.

Schulbücher dieser Art können ohne größeren Aufwand in den Unterricht eingebaut werden.

Auf Grund von bereits vorgefertigten, qualitativ hochwertigen Schulbuchaufgaben kann nicht nur die Stundenvorbereitung erleichtert werden, sondern auch mit Hilfe der vielfältigen und anpassungsfähigen Übungen der individuelle Lernprozess der Schüler*innen gefordert und gefördert werden. Zudem können sich digitale Lernumgebungen mit traditionellen Unterrichtsmethoden abwechseln, und sie schaffen Chancen für kreative und lebhaftere Unterrichtseinheiten, die das eigenverantwortliche Lernen in den Vordergrund stellen. Neben anderen digitalen Schulbüchern wie *Mathigon* können mit der weiter unten vorgestellten App *GeoGebra Classroom* auch selbst interaktive Schulbücher erstellt werden.

Flipped Classroom

Der Artikel *Towards Inquiry-Based Flipped Classroom Scenarios: a Design Heuristic and Principles for Lesson Planning* von Stefanie Schallert, Zsolt Lavicza und Ellen Vandervieren, 2021 erschienen im *International Journal of Science and Mathematics Education*, beschäftigt sich mit der neuen Unterrichtsmethode *Flipped Classroom*, bei der Vortragsphasen vor dem Unterricht stattfinden und der Schulunterricht für schüler*innenzentriertes Lernen genutzt wird. Dabei werden von Lernenden Aktivitäten vor und nach dem Unterricht erwartet. Das 5E-Unterrichtsmodell (Engagement, Exploration, Explanation, Elaboration & Evaluation) und eine Design-Heuristik für die Planung sollen dazu beitragen, die Effektivität des selbstgesteuerten Lernens zu erhöhen. Die in Österreich durchgeführte Studie, kommt zum Schluss, dass eine Design-Heuristik allein nicht ausreicht, um Lehrer*innen bei der Anwendung der *Flipped Classroom*-Methode zu unterstützen. Daher werden zudem Design-Prinzipien vorgestellt, die als hilfreiche Richtlinien für die Implementierung von *Flipped Classroom* Szenarien im Mathematikunterricht der Sekundarstufe dienen sollen. Vielfältige Materialien und Lernvideos aus dem Projekt *Mathematik macht Freude (MmF)*, die an der Universität Wien entwickelt wurden, können für die einfache Erstellung von *Flipped Classroom* Szenarien verwendet werden.

GeoGebra Classroom

Der Konferenzbeitrag von Johanna Zöchbauer und Markus Hohenwarter aus dem Jahr 2020 mit dem Titel *Developing a collaboration tool to give every student a voice in a classroom discussion*, der im Rahmen der *Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom* präsentiert wurde, stellt die Entwicklung des Online-Kollaborationswerkzeugs *GeoGebra-Classroom* vor. Dieses kombiniert im Sinne der *Connected-Classroom-Technologie* die mathematische Software GeoGebra mit einem Audience-Response-System. Zöchbauer und Hohenwarter (2020) beschreiben Umsetzungsmöglichkeiten von Connected-Classroom-Technologien zur weiteren Verbesserung des Prototyps von *GeoGebra-Classroom*, um Interaktion und Kommunikation im Unterricht zu unterstützen. Insbesondere sollen kooperatives Lernen, formative Beurteilung und Echtzeitbeobachtung von Lernenden möglich sein. Über einen zur Verfügung gestellten Code treten Lernende kostenlos per digitalem Endgerät dem Arbeitsbereich bei und bearbeiten die so zugeteilten Aufgaben. Lehrkräfte können auf alle Schüler*innen-Antworten zugreifen, diese sammeln, sortieren sowie zeitsparend und übersichtlich darstellen. In der Echtzeitbeobachtung liegt großes Potential, Schüler*innen zu ermutigen, aktiv am Unterricht teilzunehmen. Zudem bietet sich das Tool für formative Beurteilungen an, um Schüler*innen individuell zu unterstützen. Die Darstellung der gesammelten Lösungen ermöglicht eine fachliche Diskussion der Lernprodukte. Eine Kombination mit der *Flipped-Classroom-Methode* ist ebenso vorstellbar, da auch zuhause Zugriff auf die implementierten Lernpfade besteht. Zusammenfassend ist *GeoGebra-Classroom* Bereicherung für einen Unterricht, der Lernprodukte von Schüler*innen in den Mittelpunkt stellen soll.

Silent Video Tasks

Der vorgestellte Artikel aus dem Jahr 2020 von Bjarnheiður Kristinsdóttir, Freyja Hreinsdóttir, Zsolt Lavicza und Charlotte Eliza Wolff mit dem Titel *Teachers' noticing and interpretations of students' responses to silent video tasks* wurde in der Zeitschrift *Research in Mathematics Education* publiziert. Er beschreibt Vorteile der Verwen-

dung von *Silent Video Tasks* im Unterricht, bei denen Schüler*innen Tonaufnahmen zu tonlosen Kurzvideos mit mathematischem Inhalt produzieren, um die dargestellten mathematischen Ideen zu erklären. Die Methode soll Schüler*innen in der eigenständigen Beschäftigung mit den Inhalten, zum kritischen Denken und zum Diskutieren anregen. Bei der Anwendung dieser Methode ist es wichtig, mathematischen Phänomene, die gut zu visualisieren und zu interpretieren sind, möglichst ohne Texte und Symbole darzustellen.

Die Umsetzung von *Silent Videos* im Unterricht kann Abwechslung zu traditionellen Methoden des Lernens bieten, und Schüler*innen können Mathematik auf eine neue Art visuell erfassen und selbst beschreiben. Damit können sie ein konzeptionelles Verständnis erlangen und lernen, Ergebnisse zu interpretieren. Lehrpersonen erhalten durch die von Lernenden vertonten Erklärvideos die Möglichkeit, fehlerhafte Interpretationen zu erkennen und mit diesen im Sinne einer formativen Rückmeldung zu arbeiten. Auf der GeoGebra-Homepage finden sich bereits zahlreiche vorgefertigte Silent Videos zu geometrischen und anderen visualisierbaren Inhalten.

Memes im Mathematikunterricht

Dass mathematische Memes einen epistemischen Mehrwert besitzen, welcher sich im Kodierungs- und Dekodierungsmoment und deren Argumentation zeigt, verdeutlichen Giulia Bini, Ornella Robutti und Angelika Bikner-Ashbahr im 2022 im *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology* erschienenen Artikel mit dem Titel *Maths in the time of social media: conceptualizing the Internet phenomenon of mathematical memes*. Darin entwickeln die Autorinnen ein Konzept mathematischer Memes durch einen theoretischen Zugang mit memetischer und kultureller Perspektive, einer beobachtenden Felduntersuchung sowie einer instrumentellen Fallstudie, in der das pädagogische Potenzial sichtbar wird. Durch die Entschlüsselung mathematischer Memes, wozu mathematisches Fach- und Transferwissen erforderlich ist, können kognitiv aktivierende Situationen geschaffen werden, welche zugleich motivierend und ansprechend auf

Schüler*innen wirken können. Mathematische Memes, die laut Bini et al. (2022) als mathematische Aussagen gelten, sprechen im Gegensatz zu klassischen mathematischen Aussagen Emotionen von Schüler*innen und somit einen größeren Kreis von Lernenden an. Daher kann eine kooperative Analyse und Überprüfung bereits existierender mathematischer Memes und die Produktion eigener Memes mithilfe geeigneter Begleitmaterialien, wie anleitende Arbeitsblätter oder Websites zur einfachen Erstellung von Memes, den Mathematikunterricht bereichern. Konkrete Einsatzmöglichkeiten sind in allen Phasen des Unterrichts gegeben, im Besonderen aber im Einstieg in neue Themen oder in der Sicherung von erlernten Inhalten.

Fazit

Die hier dargestellte Collage von Forschungsartikeln umfasst eine bunte Mischung aus mathematischen Inhalten, Methoden und digitalen Technologien, die Mathematikunterricht bereichern können. Einige der präsentierten Ideen lassen sich in attraktiven Projekten umsetzen,

andere können zu einem integralen Bestandteil des alltäglichen Unterrichts werden. Den vorgestellten Inhalten ist ein umfassenderer Zugang gemeinsam, der vielfach über fachliche Grenzen der Mathematik hinausgeht. Die Förderung von *21st century skills*, die Entwicklung von Kompetenzen im MINT-Bereich oder die Integration sozial-relevanter Themen im Unterricht können helfen, eine Lernumgebung zu schaffen, die von Schüler*innen als modern, authentisch und bedeutungsvoll wahrgenommen wird und somit der Attraktivierung des Mathematikunterrichts dient.

Literatur

Arnold, P., & Franklin, C. (2021). What makes a good statistical question? *Journal of Statistics and Data Science Education*, 29(1), 122–130. <https://doi.org/10.1080/26939169.2021.1877582>

Ärlebäck, J. B., & Albarracín, L. (2019). The use and potential of Fermi problems in the STEM disciplines to support the development of twenty-first century competencies. *ZDM*, 51(6), 979–990. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01075-3>

Barzel, B., Holzäpfel, L., Leuders, T., & Streit, C. (2017). *Mathematik unterrichten: Planen, durchführen, reflektieren* (5. Auflage). Cornelsen.

me checking my math for an exam



me checking my math for a math meme page



Abbildung 2: Memes als mathematische Aussagen mit pädagogischem Potenzial (li.; Bini et al., 2020, S. 1268) und Beispiel eines mathematischen Memes (re.; eigene Abbildung erstellt mit <https://imgflip.com/memegenerator>)

- Ben-Zvi, D., & Ben-Arush, T. (2014). EDA Instrumented learning with TinkerPlots. In T. Wassong, D. Frischmeier, P. R. Fischer, R. Hochmuth, & P. Bender (Hrsg.), *Mit Werkzeugen Mathematik und Stochastik lernen – Using tools for learning mathematics and statistics* (S. 193–208). Springer Fachmedien Wiesbaden. https://doi.org/10.1007/978-3-658-03104-6_15
- Bini, G., Robutti, O., & Bikner-Ahsbahs, A. (2020). Maths in the time of social media: Conceptualizing the Internet phenomenon of mathematical memes. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 1–40. <https://doi.org/10.1080/0020739X.2020.1807069>
- Budinski, N., Lavicza, Z., & Houghton, T. (2022). Opportunities for 3D printing in hybrid education. *Open Education Studies*, 4(1), 339–344. <https://doi.org/10.1515/edu-2022-0175>
- Drijvers, P., Doorman, M., Boon, P., Reed, H., & Gravemeijer, K. (2010). The teacher and the tool: Instrumental orchestrations in the technology-rich mathematics classroom. *Educational Studies in Mathematics*, 75(2), 213–234. <https://doi.org/10.1007/s10649-010-9254-5>
- Fenyvesi, K., Budinski, N., & Lavicza, Z. (2014). Two solutions to an unsolvable Problem: Connecting Origami and GeoGebra in a Serbian high school. In G. Greenfield, G. Hart, & R. Sarhangi (Hrsg.), *Proceedings of Bridges 2014: Mathematics, Music, Art, Architecture, Culture* (S. 95–102). Phoenix: Tessellations Publishing.
- Hoch, S., Reinhold, F., Werner, B., Richter-Gebert, J., & Reiss, K. (2018). Design and research potential of interactive textbooks: The case of fractions. *ZDM*, 50(5), 839–848. <https://doi.org/10.1007/s11858-018-0971-z>
- Kristinsdóttir, B., Hreinsdóttir, F., Lavicza, Z., & Wolff, C. E. (2020). Teachers' noticing and interpretations of students' responses to silent video tasks. *Research in Mathematics Education*, 22(2), 135–153. <https://doi.org/10.1080/14794802.2020.1722959>
- Maass, K., Doorman, M., Jonker, V., & Wijers, M. (2019). Promoting active citizenship in mathematics teaching. *ZDM*, 51(6), 991–1003. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01048-6>
- Maass, K., Geiger, V., Ariza, M. R., & Goos, M. (2019). The Role of mathematics in interdisciplinary STEM education. *ZDM*, 51(6), 869–884. <https://doi.org/10.1007/s11858-019-01100-5>
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers college record*, 108(6), 1017–1054.
- Rizzo, K. A., del Río, L. S., Manceñido, M. E., Lavicza, Z., & Houghton, T. (2019). Linking photography and mathematics with the use of technology. *Open Education Studies*, 1(1), 262–266. <https://doi.org/10.1515/edu-2019-0020>
- Schallert, S., Lavicza, Z., & Vandervieren, E. (2022). Towards inquiry-based flipped classroom scenarios: A design heuristic and principles for lesson planning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 20(2), 277–297. <https://doi.org/10.1007/s10763-021-10167-0>
- Trouche, L. (2004). Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations. *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, 9(3), 281–307. <https://doi.org/10.1007/s10758-004-3468-5>
- Valls Pou, A., Canaleta, X., & Fonseca, D. (2022). Computational thinking and educational robotics integrated into project-based learning. *Sensors*, 22(10), 3746. <https://doi.org/10.3390/s22103746>
- Weigand, H.-G., Pinkernell, G., & Schüler-Meyer, A. (2022). Basic mental models of equations -Theoretical conception and practical meaning. In J. Hodgen, E. Geraniou, G. Bolondi, F. Ferretti (Hrsg.), *Proceedings of the Twelfth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (S. 654–661). Free University of Bozen-Bolzano, Italy and ERME.
- Weinhandl, R., Mayerhofer, M., Houghton, T., Lavicza, Z., Eichmair, M., & Hohenwarter, M. (2023). Mathematics student personas for the design of technology-enhanced learning environments. *Research and Practice in Technology Enhanced Learning*, 18, 032. <https://doi.org/10.58459/rptel.2023.18032>
- Wolfinger, J., Ahrer, J. M., Hofstätter, A., & Hohenwarter, M. (2020, März 9–13). Möglichkeiten von Augmented Reality in der GeoGebra 3D Rechner App [Konferenzbeitrag]. 54. Jahrestagung der Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Würzburg, Deutschland. <https://doi.org/10.17877/DE290R-21638>
- Zakariashvili, M. (2021). Challenges in human-computer interaction on the example of Photomath mobile application. *Middle European Scientific Bulletin*, 16.
- Zöchbauer, J. & Hohenwarter M. (2020, Feb.). Developing a collaboration tool to give every student a voice in a classroom discussion. Seventh ERME Topic Conference on Language in the Mathematics Classroom, Montpellier, France.