Pädagogische Hochschule Vorarlberg

Christoph Erath

PH Vorarlberg

Feldkirch, Österreich

Mathematik einmal ungenau, oder doch nicht?

Können wir unsere Welt im Schulunterricht approximieren?

Outline

Ausgangssituation/Fragen

Mathematik für Erwachsene

-im Rückblick häufig negativ

-sahen nie einen Sinn darin

-wissen “nichts mehr”

-später (teilweise): Wunsch nach mehr Mathe-Wissen!

J. Maasz, WTM Verlag Münster, 2015

http://www.alm-online.net/

Ausgangssituation/Fragen

Mathematik für Erwachsene

-im Rückblick häufig negativ

-sahen nie einen Sinn darin

-wissen “nichts mehr”

-später (teilweise): Wunsch nach mehr Mathe-Wissen!

Forderung

-Mathematikunterricht realitätsbezogen

-Aber zuviel Stoffinhalt?

J. Maasz, WTM Verlag Münster, 2015

http://www.alm-online.net/

Modellbildung und Simulation

Reale Welt

Modellbildung und Simulation

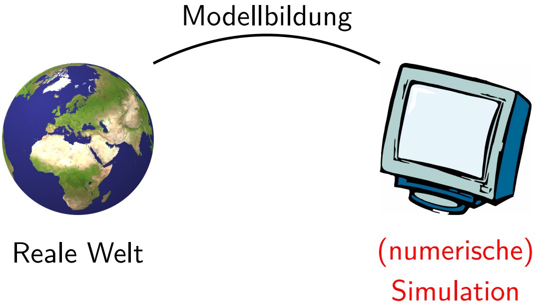
Modellbildung

Reale Welt

Modellbildung

- Abbilden von Teilstücken der Realität
- Stellvertretend wird ein abstraktes Abbild untersucht

Modellbildung und Simulation



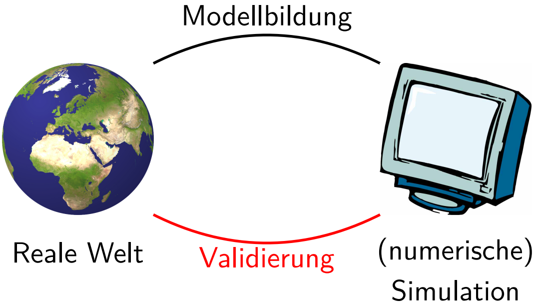
Modellbildung

- Abbilden von Teilstücken der Realität
- Stellvertretend wird ein abstraktes Abbild untersucht

Simulation

- Nachbildung eines dynamischen Prozesses
- Erkenntnissen auf die Wirklichkeit übertragbar

Modellbildung und Simulation



Modellbildung

- Abbilden von Teilstücken der Realität
- Stellvertretend wird ein abstraktes Abbild untersucht

Simulation

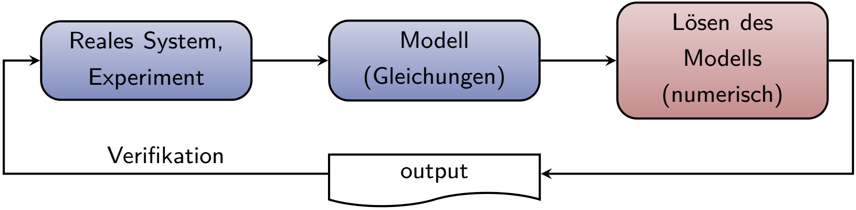
- Nachbildung eines dynamischen Prozesses
- Erkenntnissen auf die Wirklichkeit übertragbar

Warum ist numerische Simulation so wichtig?

- *Wiederholbarkeit* eines Experiments
  z.B. Raumfahrt, Kernkraft, Bodenverunreinigung
- *Skalierbarkeit* eines Modells
  z.B. Bodenverunreinigung (Zeit)
- *Zerstörungsfreie Experimente* auf verschiedenen Skalen
  (virtuelle Meß- und Analysewerkzeuge)
- Geringere *Entwicklungskosten*
  (weniger Prototypen und Entwicklungszyklen)
- ...

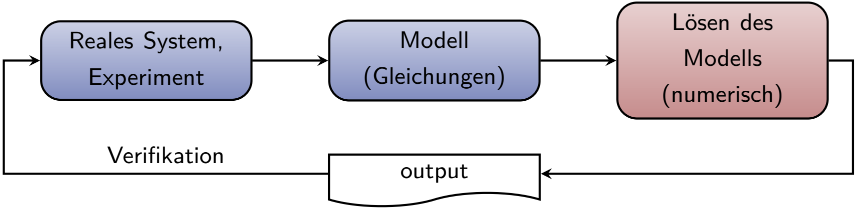
Mathematische Fragen

Professionelle Anwendung

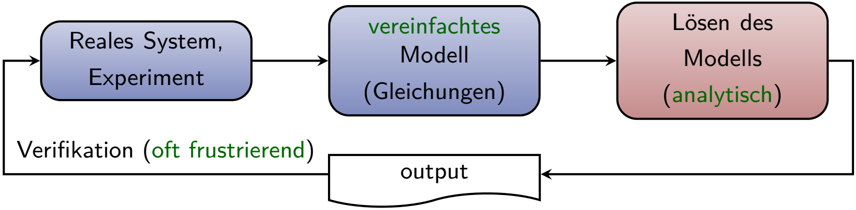


Mathematische Fragen

Professionelle Anwendung



Schulanwendung

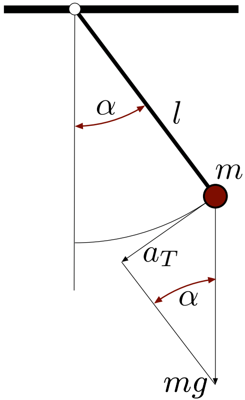


Mathematisches Pendel

$$\text{Kraft} = \text{Masse} * \text{Beschleunigung}$$

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

$$m\frac{d^2(l\alpha)}{dt^2} = -mg\sin\alpha$$



Mathematisches Pendel

Kraft $=$ Masse $*$ Beschleunigung

$$\vec{F} = m\vec{a}.$$

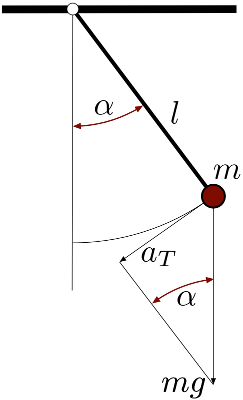
$$m\frac{d^2(l\alpha)}{dt^2} = -mg\sin\alpha$$

Umformung mit $\ddot{\alpha} := \frac{d^2(\alpha)}{dt^2}$

Pendelbewegung

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha \overset{\text{für } \alpha \text{ klein}}{\approx} -\frac{g}{l}\alpha$$

mit $\alpha(0) = \alpha_0 \qquad \dot{\alpha}(0) = 0.$



Analytische Lösung

Klassischer Schulstoff (7.Oberstufe)

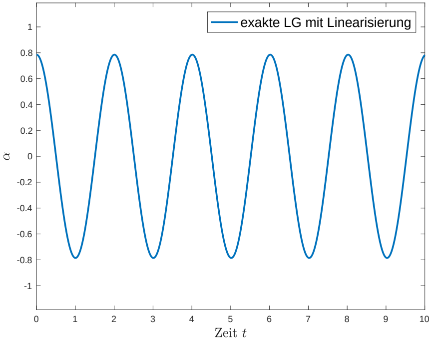
$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ Schwingungsdauer: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Analytische Lösung

Klassischer Schulstoff (7.Oberstufe)

$\alpha(t) = \alpha_0 \sin(\omega_0 t + \frac{\pi}{2})$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$ $\qquad$ Schwingungsdauer: $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$

Bsp.: $\alpha_0 = \pi/4$, $l = 1$, $T \approx 2$



Realistisches Modell

Berücksichtigung des Luftwiderstands

Pendelbewegung

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{C_L}{m}\dot{\alpha}|\dot{\alpha}|$$

$$\text{mit } \alpha(0) = \alpha_0 \qquad \dot{\alpha}(0) = 0.$$

$C_L \ldots$ Luftdichte, Körperform

Realistisches Modell

Berücksichtigung des Luftwiderstands

Pendelbewegung

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{C_L}{m}\dot{\alpha}|\dot{\alpha}|$$

$$\text{mit } \alpha(0) = \alpha_0 \qquad \dot{\alpha}(0) = 0.$$

$C_L \ldots$ Luftdichte, Körperform

Elementare Umformung auf:

$$\dot{\alpha} = \omega$$

$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{C_L}{m}\omega|\omega|.$$

Realistisches Modell

Berücksichtigung des Luftwiderstands

Pendelbewegung

$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{C_L}{m}\dot{\alpha}|\dot{\alpha}|$$

mit $\alpha(0) = \alpha_0 \qquad \dot{\alpha}(0) = 0.$

$C_L \ldots$ Luftdichte, Körperform

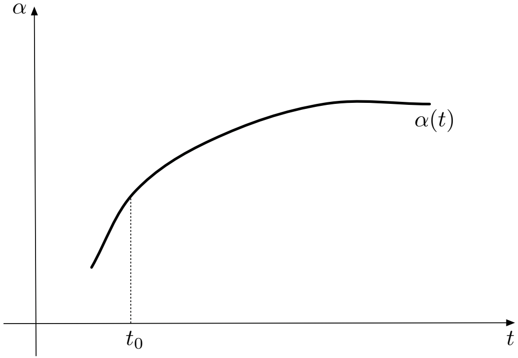
Elementare Umformung auf:

$$\dot{\alpha} = \omega$$

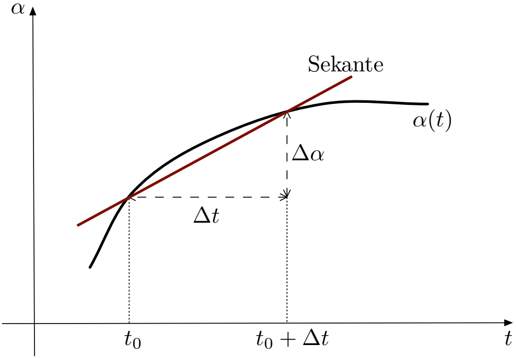
$$\dot{\omega} = -\frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{C_L}{m}\omega|\omega|.$$

Lösung nur mit numerischem Verfahren!

Motivation Euler Verfahren



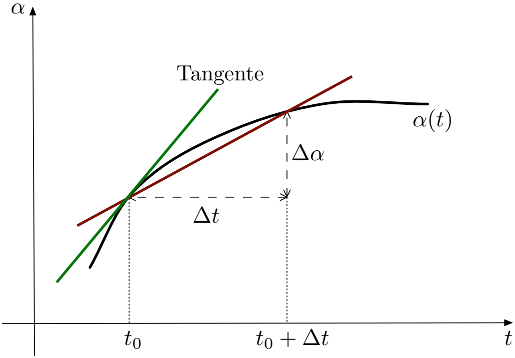
Motivation Euler Verfahren



Steigung der Sekante:

$$\frac{\Delta\alpha}{\Delta t} = \frac{\alpha(t_0 + \Delta t) - \alpha(t_0)}{\Delta t}$$

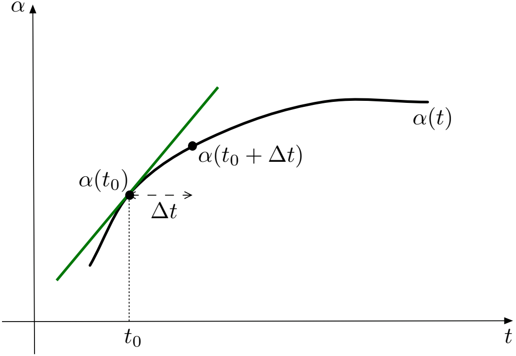
Motivation Euler Verfahren



Steigung der Tangente/Ableitung (7. Oberstufe):

$$\dot{\alpha}(t_0) = \frac{d\alpha}{dt}(t_0) := \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\alpha(t_0 + \Delta t) - \alpha(t_0)}{\Delta t}$$

Motivation Euler Verfahren

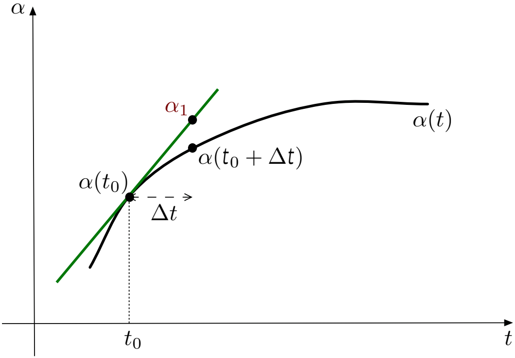


Gegeben:

$$\dot{\alpha}(t) = f(t) \qquad \alpha(t_0) = \alpha_0.$$

$\alpha(t)$ unbekannt (außer in t_0). Steigung $\dot{\alpha}(t)$ für alle t bekannt!

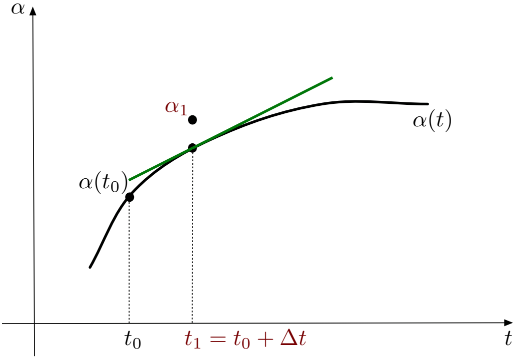
Motivation Euler Verfahren



1.Schritt

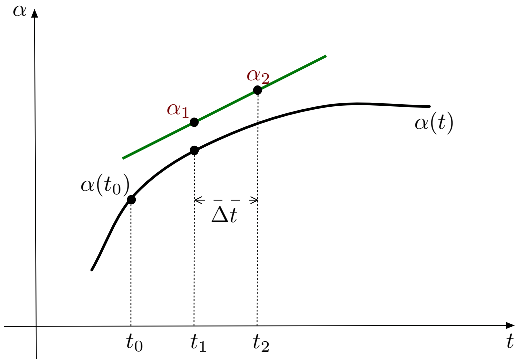
$$\alpha_1 = \alpha(t_0) + \Delta t\,\dot{\alpha}(t_0) = \alpha(t_0) + \Delta t\, f(t_0) \approx \alpha(t_0 + \Delta t)$$

Motivation Euler Verfahren



Steigung in $t_1 = t_0 + \Delta t$ durch $f(t_1)$ gegeben!

Motivation Euler Verfahren



2.Schritt

$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta t f(t_1) \approx \alpha_2(t_2)$$

Beliebig fortsetzbar!

Explizites Euler Verfahren

Gegeben: Schrittweite Δt, Startwert $\alpha_0 = \alpha(t_0)$

$$\alpha_1 = \alpha_0 + \Delta t f(t_0, \alpha_0), \quad t_1 = t_0 + \Delta t$$
$$\alpha_2 = \alpha_1 + \Delta t f(t_1, \alpha_1), \quad t_2 = t_1 + \Delta t$$
$$\dots$$

Ausgabe: α_j für ein $j \in \mathbb{N}$

Explizites Euler Verfahren

Gegeben: Schrittweite Δt, Startwert $\alpha_0 = \alpha(t_0)$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_0 + \Delta t f(t_0, \alpha_0), \quad t_1 = t_0 + \Delta t \\ \alpha_2 &= \alpha_1 + \Delta t f(t_1, \alpha_1), \quad t_2 = t_1 + \Delta t \\ &\dots \end{aligned}$$

Ausgabe: α_j für ein $j \in \mathbb{N}$

Fehler (schwierig)

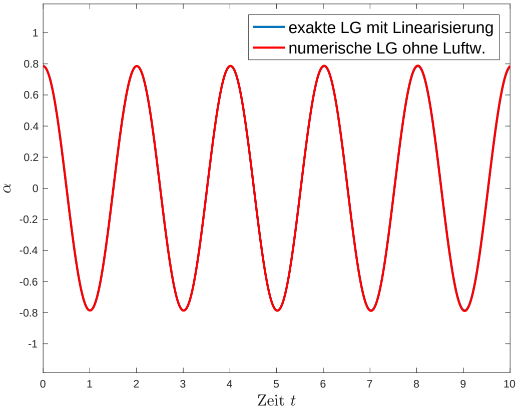
$$|\alpha(t_j) - \alpha_j| \leq C(t_j)\Delta t$$

Je kleiner die Schrittweite Δt, desto besser/genauer meine Approximation! Aber das Verfahren wird teurer!

Andere Herleitung

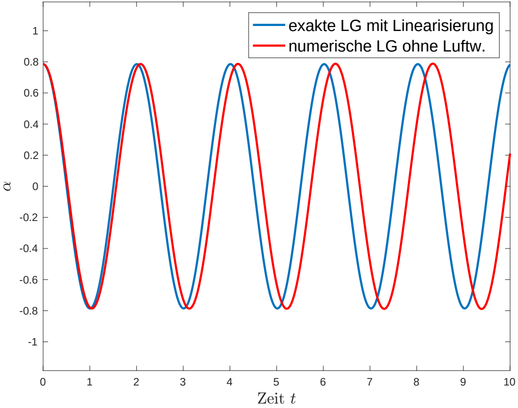
- über Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung
- numerische Quadratur (Approximation des Integrals)
- erlaubt Konstruktion genauerer Verfahren

Numerische Lösung



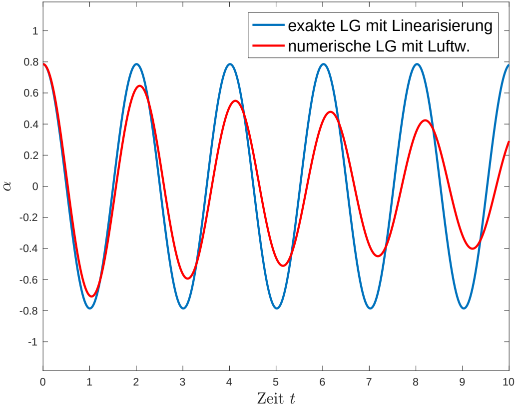
$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\alpha, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4}, \quad l = 1$$

Numerische Lösung



$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4}, \quad l = 1$$

Numerische Lösung



$$\ddot{\alpha} = -\frac{g}{l}\sin\alpha - \frac{C_L}{m}\dot{\alpha}|\dot{\alpha}|, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{4}, \quad l = 1, \quad C_L = 0.1, \quad m = 1$$

Animation

Lernstufen in unserem Modell

- Mathematische Verifikation (einfaches Modell): vergleiche analytische Lösung mit numerischer Lösung
- realisiere und argumentiere praktisches Modell
- vergleiche numerische Ergebnisse mit praktischen Ergebnissen
  Reales Bsp. C. Spreitzer, ÖMG 2015

Umsetzung

- für Schüler ideales Thema zum “Probieren”

  reines Präsentieren nicht empfehlenswert

  - kann Teile vorgeben, z.B. keine Details zum Modell
  - Teile der zu schreibenden Software vorgeben
  - Gruppenarbeit

Umsetzung

- für Schüler ideales Thema zum “Probieren”

  reines Präsentieren nicht empfehlenswert

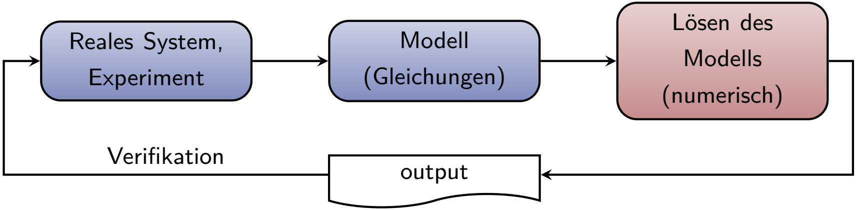
  - kann Teile vorgeben, z.B. keine Details zum Modell
  - Teile der zu schreibenden Software vorgeben
  - Gruppenarbeit

- Vor- bzw. Nachteil: interdisziplinär!

Mathematische Kompetenzen

- Darstellen, Modellbilden
- Rechnen, Operieren
- Interpretieren
- Argumentieren, Begründen

Regt elaboratives Lernen an!



H. Heugl, ÖMG, 2015

Herausforderung/andere Themen

Herausforderungen für Sekundarstufe

- Modelle werden schnell kompliziert $\rightarrow$ statt Motivation wird Frustration gefördert!
- Integral - Quadraturformeln
- Transportprozesse? $\partial_t u + \partial_x u = f(t, x)$
- Computertomographie; M. Hochbruck, J-M. Sautter, 2002
- Modell Herzfrequenz unter Belastung (Ergometer)

Literatur

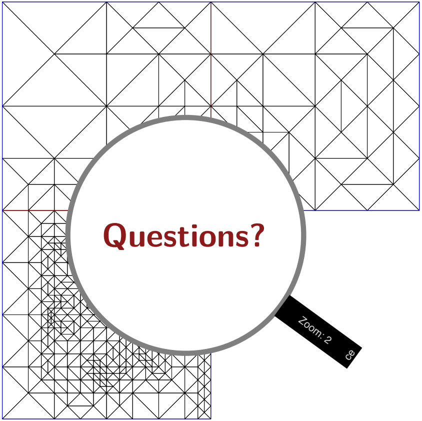
J. Maaß: Modellieren in der Schule. Ein Lernbuch zu Theorie und Praxis des realitätsbezogenen Mathematikunterrichts, WTM, Münster, 2015

C. Spreitzer: Numerische Modellierung der gedämpften Pendelschwingung und des Falls aus großer Höhe, *Didaktik der Mathematik, ÖMG*, 48, 119–135, 2015

H. Heugl: Kompetenzentwicklung im Bereich Modellieren und Argumentieren, *ÖMG*,2011

M. Hochbruck, J-M. Sautter: Mathematik fürs Leben am Beispiel der Computertomographie, *Mathematische Semesterberichte*, 49(1), 95–113, Springer, 2002

Vielen Dank!



https://www.ph-vorarlberg.ac.at/?id=264
christoph.erath@ph-vorarlberg.ac.at