Lineare Algebra

WS 2016/17

Bachelorstudium Lehramt Sekundarstufe (Allgemeinbildung)
Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik

Prüfungsinformationen

Sie bekommen bei der Prüfung eine Aufgabe aus dieser Liste, die Sie lösen müssen. Danach reden wir über die zugehörige Themen. **Wichtig:** Nicht alle Themen werden hier aufgelistet, die können aber trotzdem noch gefragt werden.

1. Zeigen Sie dass es für jede positive ganze Zahl $n \geq 3$ gilt $\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} = 2^n$.

   (Themen: Beweise, Induktion, Binomialkoeffizienten)

2. Beweisen Sie: Wenn a und b Elemente eines kommutativen Rings sind, dann ist $a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2$, $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$. (Themen: Ringe, Körper, Gruppen)

3. Lösen Sie die folgenden Gleichungen „modulo 11“(das heißt in $\mathbb{Z}_{11}$): $6x = 2$, $2x + 4 = 9$, $3x - 9 = 5$, $7x = 1$. (Themen: Ringe, Körper, Gruppen)

4. Schreiben Sie die Vektoren $(5, 2, 3)$ und $(0, -3, 0)$ als Linearkombinationen der Vektoren $a_1 = (1, 1, 0)$, $a_2 = (0, 1, 1)$ und $a_3 = (0, 0, 2)$. (Themen: Vektorraum, Erzeugendensystem)

5. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Überprüfen Sie folgendes System von Vektoren auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit: $(1, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$, $(0, -3, 2)$. (Zhemen: Lineare abhängigkeit, Basis)

6. Bestimmen Sie die Dimension der reellen Vektorraum $\mathcal{P}_3$ der reellen Polynome vom Grad höchstens 3. (Themen: Dimension)

7. $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =?$ (Themen: Matrizen)

8. Sei $V = \mathbb{R}^3$ und $W = \langle (1, 1, 1) \rangle$. Was ist V/W? (Themen: Faktorraum, affine Teilräume)

9. Sei $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$ Vektorraum und betrachte die Funktion $f =$ Drehung um $30°$ im mathematisch positiven Sinn. Geben Sie eine Matrizendarstellung dieser Abbildung an. (Themen: Matrizendarstellung linearer Abbildungen)

10. Sei $V = \mathbb{R}^2$ als $\mathbb{R}$ Vektorraum, $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, und $f : V \to V$, $f(v) = Av$. Bestimmen Sie $\operatorname{Ker} f$, das Bild von f, und $V/\operatorname{Ker} f$. (Themen: Lineare Abbildungen, Homomorphiesatz)

11. Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix}$. (Themen: Rang, Gauß Algoritmus)

12. Bestimmen Sie die zur Basis $B = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ des $\mathbb{R}^3$ duale Basis. (Themen: Dualraum, Bidual)

13. Berechnen Sie die Determinante der Matrix $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. (Themen: Permutationen, Determinante)

14. Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. (Themen: Eigenwerte)

15. Ist die Matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ positiv definit? (Themen: Bilinearformen)