DAS RIEMANN-INTEGRAL

ANDRÁS BÁTKAI

1. Stammfunktionen

Im Folgenden möchten wir uns mit der Umkehrung der Operation des Differenzierens beschäftigen. Dazu folgende Definition.

1.1. **Definition.** Sei f eine reell-reelle Funktion, $D(f) = I$ ein Intervall[1]. Wir sagen, dass die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ eine *Stammfunktion* oder ein *unbestimmtes Integral* der Funktion f ist, wenn F differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

Es ist leicht einzusehen, dass, wenn F eine Stammfunktion von f ist, auch $F + K$ für eine beliebige Konstante $K \in \mathbb{R}$ eine Stammfunktion von f ist. Im letzten Semester haben wir gesehen (freilich mit anderem Wortgebrauch), dass, wenn F und G zwei Stammfunktionen einer auf einem Intervall definierten Funktion f sind, ein $K \in \mathbb{R}$ existiert, sodass $F(x) - G(x) = K$ für alle x gilt. Die Stammfunktion ist also immer nur bis auf eine Konstante bestimmt, sie ist nicht eindeutig.

Wir führen eine Bezeichnung für die Menge der Stammfunktionen ein. Vorab bemerken wir, dass die Bezeichnung vielleicht vom logischen Standpunkt aus nicht perfekt ist, wir sie aber dennoch verwenden, weil sie in der nationalen und internationalen Literatur weit verbreitet ist; es ist im Wesentlichen die seit Leibniz gebräuchliche Bezeichnung und kann mit den entsprechenden Vereinbarungen präzise gemacht werden. Sei $D(f) = I$ ein Intervall und bezeichne die Menge der Stammfunktionen von f mit

$$\int f(x)dx := \{F : I \to \mathbb{R} \,:\, F' = f\}\,.$$

Weitere gebräuchliche Bezeichnungen:

$$\int f(x)dx = \int f = \int f(x) = \int f dx.$$

Über den Ursprung der Bezeichnung werden wir im Kapitel über das Riemann-Integral noch sprechen. Den Vorhergehenden entsprechend gilt also, wenn F eine Stammfunktion der Funktion f ist, wobei $D(f) = I$ ein Intervall ist, dass

$$\int f(x)dx = \{F + C \,:\, C \in \mathbb{R}\}\,.$$

Im Folgenden treffen wir die folgende Vereinbarung, teilweise angetrieben von der Vereinfachung der Notation und aus Faulheit. Im Folgenden werden wir diese obige Menge nicht immer in solcher Ausführlichkeit ausschreiben, sondern vereinfacht in der Form $F + C$, also

$$\int f(x)dx = F(x) + C.$$

Wenn wir diese Schreibweise verwenden, erinnern wir uns immer daran, dass C hier nicht eine Zahl bezeichnet, sondern alle möglichen Zahlen, d.h. dieses Symbol bezeichnet nicht eine Funktion, sondern eine Menge von Funktionen.

Die Differentiationsregeln liefern das unbestimmte Integral für sehr viele Funktionen. Die wichtigsten Grundintegrale sind die folgenden:

Date: 22. März 2026.

[1]Wenn wir im Folgenden das Wort Intervall verwenden, meinen wir immer ein nicht-entartetes Intervall, d.h. ein Intervall mit mindestens zwei Punkten.

$$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C, \qquad \text{wobei} \quad \begin{cases} I = \mathbb{R}, & \text{wenn } \alpha \in \mathbb{N} \\ I = (-\infty, 0) \text{ oder } I = (0,\infty) & \text{wenn } \alpha = -2, -3, \dots \\ I = (0, +\infty) & \text{wenn } \alpha \in \mathbb{R}, \alpha \neq -1 \end{cases}$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C, \qquad \text{wobei} \qquad I = (-\infty, 0) \text{ oder } I = (0,\infty)$$

$$\int \cos x dx = \sin x + C, \qquad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$\int \operatorname{ch} x dx = \operatorname{sh} x + C, \qquad \int \operatorname{sh} x dx = \operatorname{ch} x + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C, \qquad \int \frac{1}{1+x^2} dx = \operatorname{arctg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \operatorname{arsh} x + C, \qquad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + C,\ I = (-1,1)$$

Die Liste kann nach Belieben bis ins Unendliche fortgesetzt werden, indem man die Differentiation bekannter Funktionen umkehrt, z.B.

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C, \qquad \int x e^{x^2} dx = \frac{1}{2} e^{x^2} + C.$$

Nach den Stammfunktionen der elementaren Funktionen können wir zu den Rechenregeln des unbestimmten Integrals übergehen. Da die Differentiation eine lineare Operation ist, ergibt sich sofort, dass dies auch für die Integration gilt, also

$$\int (af + bg) = a \int f + b \int g.$$

Leider verhält sich die Differentiation bei Multiplikation und Komposition nicht so schön, daher haben wir bei komplizierteren Funktionen nur fallweise Methoden. Mit der Multiplikation hängt die partielle Integration zusammen, welche die Formel

$$\int Fg = FG - \int fG$$

bezeichnet. Hierbei sind $F' = f$, $G' = g$ und $D(f) = D(g) = I$ ein Intervall.

Im Zusammenhang mit der Komposition ist anschaulich klar, dass

$$\int (F \circ g) g' = F \circ g + C.$$

Wichtige Spezialfälle dieser Formel sind die folgenden:

$$\int f(ax+b) = \frac{1}{a} F(ax+b) + C,$$

$$\int g^\alpha g' = \frac{g^{\alpha+1}}{\alpha+1} \quad (\alpha \neq -1),$$

$$\int \frac{g'}{g} = \ln|g| + C.$$

Die Zusammenhänge sind sinngemäß immer auf dem entsprechenden Intervall definiert. Die Identität für das Integral der Komposition wird durch die folgende Aussage präzisiert, die die Substitutionsregel der Integration formuliert.

1.2. **Satz.** *Seien $D(f) = I$, $D(g) = J$ Intervalle, $g'(t) \neq 0$, $g(J) = I$, und sei Φ eine Stammfunktion der Funktion $(f \circ g) g'$. Dann existiert g^{-1} und $F(x) := \Phi(g^{-1}(x))$ ist eine Stammfunktion der Funktion f, d.h.*

$$\int f(x) dx = \int f(g(t)) g'(t) dt.$$

Beweis. Aus dem Satz von Darboux folgt, dass entweder g' auf dem Intervall J ein konstantes Vorzeichen hat, sodass g streng monoton ist. Also $h := g^{-1}$. Nach dem im letzten Semester Gelernten ist h differenzierbar und

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))}.$$

Wir erinnern daran, dass

$$\Phi'(t) = f(g(t))g'(t) \quad \text{und} \quad g(h(x)) = x.$$

Also

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\Phi(h(x)) = \Phi'(h(x))h'(x) = f(g(h(x)))g'(h(x))h'(x) = f(x)g'(h(x))\frac{1}{g'(h(x))} = f(x).$$

□

Schließlich weisen wir darauf hin, dass rationale gebrochene Funktionen sowie rationale gebrochene Funktionen von trigonometrischen und Exponentialfunktionen in den Übungen behandelt wurden. Beispiele zur Anwendung der Regeln kamen in den Übungen vor oder sind in Barnabás Bárczys Buch Întegralrechnungßu finden.

2. Riemann-Integral

[2]

Zuvor konnten wir sehen, dass die Umkehrung der Differentialrechnung, die Suche nach Stammfunktionen durch Umkehrung der Differentiationsregeln, sehr fallspezifisch ist. In Spezialfällen erhalten wir eine Antwort, und selbst wenn wir uns eine riesige Menge an Tricks aneignen, können wir uns unserer Sache nicht sicher sein. Nun möchten wir nach einem allgemeineren Prinzip suchen.

Das Problem, neu formuliert und vereinfacht, ist folgendes. Sei $D(F) = [a, b]$ ein Intervall, die Funktion F sei unbekannt. Gegeben ist die Zahl $F(a)$ und die Funktion $F'(x) = f(x)$. Die Frage ist, ob wir den Funktionswert $F(b)$ irgendwie bestimmen können. Natürlich interessiert uns der Wert der Funktion F in jedem beliebigen Punkt $x \in [a, b]$, aber wenn wir die Rolle des Punktes b danach beliebig verändern, können wir offensichtlich den Funktionswert in jedem Punkt erhalten. Auf theoretischer Ebene können wir die Frage schnell erledigen, denn im letzten Semester haben wir alles gelernt, was zur Beantwortung nötig ist. Nach dem Mittelwertsatz von Lagrange gibt es nämlich ein $\eta \in (a, b)$, sodass

$$F(b) = F(a) + f(\eta)(b - a).$$

Damit besteht leider das Problem, dass es in der Praxis unbrauchbar ist, da wir nicht wissen, wo genau sich der Punkt η befindet. Wir haben in der Vorlesung auch gesehen, dass, wenn wir den Wert $F(b)$ nicht exakt, sondern nur näherungsweise erhalten wollen, die obige Darstellung ebenfalls nicht hilft, da wir uns sehr stark irren können, wenn wir zufällig einen Punkt $\xi \in (a, b)$ wählen und versuchen, die Zahl $F(b)$ durch den Wert $F(a)+f(\xi)(b-a)$ zu ersetzen. Ein schwacher Hoffnungsschimmer kann jedoch aufleuchten: Wir können uns aus dem letzten Semester daran erinnern, dass sich eine differenzierbare Funktion auf einem sehr kleinen Intervall im Wesentlichen wie eine lineare Funktion verhält. Wir können also die Genauigkeit des obigen Verfahrens verbessern, indem wir das Intervall $[a, b]$ in sehr kleine Teilintervalle zerlegen und das Verfahren dort ausreichend oft wiederholen. Sei also $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, $\eta_i \in [x_{i-1}, x_i]$ gemäß dem Mittelwertsatz von Lagrange so, dass

$$F(x_i) - F(x_{i-1}) = f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Dann erhalten wir, wenn wir diese Beziehungen nach i summieren, dass

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Wir können hoffen, dass, wenn wir das Intervall $[a, b]$ in sehr viele kleine Intervalle zerlegen, wir, da die differenzierbare Funktion auf den kleinen Intervallen ïm Wesentlichenllinear ist, insgesamt keinen großen Fehler begehen, wenn wir anstelle von η_i zufällig Punkte ξ_i aus den Intervallen $[x_{i-1}, x_i]$ wählen.

[2] Dieses Kapitel ist noch nicht fertig!

Leider garantiert jedoch nichts, dass wir durch Addition der vielen kleinen Fehler am Ende nicht wieder einen großen Fehler erhalten. Diesen Makel können wir am einfachsten beheben, indem wir genau dies von der Funktion f fordern. Um präzise und verständlicher zu machen, was wir tun, müssen wir einige Konzepte und Definitionen einführen. Sei $[a, b]$ ein nicht-entartetes abgeschlossenes Intervall, $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ eine Zerlegung. Zur weiteren Vereinfachung der Notation werden wir auf die Zerlegung als $Z := \{x_0, x_1, \ldots x_n\}$ verweisen, d.h. wir werden die Menge der Zerlegungspunkte als Zerlegung bezeichnen. Bezeichne $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ein Teilintervall der Zerlegung, $k = 1, 2, \ldots n$. Hierbei ist es unerheblich, ob wir offene, abgeschlossene oder halboffene Intervalle wählen, da später überall nur die Länge der Intervalle eine Rolle spielen wird. Hier müssen wir uns nun der Eindeutigkeit halber für etwas entscheiden. Bezeichne ferner $|I_k|$ die Länge des Intervalls I_k und sei $|Z| := \max\{|I_k| : k = 1, 2, \ldots, n\}$ die *Feinheit* der Zerlegung. Für eine gegebene Zerlegung bezeichne $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ jenen n-dimensionalen Vektor, für den $\xi_k \in \operatorname{int} I_k = (x_{k-1}, x_k)$ gilt. Für spätere Verweise nennen wir einen solchen Vektor Stützstellenvektor[3].

Schließlich können wir zu einer gegebenen Zerlegung Z und einem dazugehörigen Stützstellenvektor $\boldsymbol{\xi}$ einen Ausdruck definieren, den wir als die zur Zerlegung gehörende Riemann-Näherungssumme bezeichnen. Sei

$$\begin{aligned} S(f, Z, \boldsymbol{\xi}) = S(Z, \boldsymbol{\xi}) &:= f(\xi_1)(x_1 - x_0) + f(\xi_2)(x_2 - x_1) + \ldots + f(\xi_n)(x_n - x_{n-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} f(\eta_i)|I_i|. \end{aligned}$$

Basierend auf dem Vorhergehenden müssen wir die folgende Eigenschaft von der Funktion f fordern, damit unsere Konstruktion zur Bestimmung von $F(b)$ funktioniert. Wir führen den Begriff für eine beliebige Funktion f ein, da seine Nützlichkeit weit über das in der Einleitung behandelte Problem hinausgeht.

2.1. **Definition.** Sei $D(f) = [a, b]$ ein Intervall. Wir sagen, dass f *Riemann-integrierbar* ist, wenn für jede Zerlegungsfolge mit $|Z_n| \to 0$ und jede beliebige Stützstellenvektor-Folge $(\boldsymbol{\xi}^{(n)})$ die Folge der Riemann-Näherungssummen $S(Z_n, \boldsymbol{\xi}^{(n)})$ konvergiert.

Es ist leicht, sich indirekt mit der Methode des Ineinandermischens (Reißverschlussprinzip für Folgen) Folgendes zu überlegen.

2.2. **Behauptung.** *Wenn f Riemann-integrierbar ist, dann können die Riemann-Näherungssummen nur eine Art von Grenzwert haben.*

Dies berechtigt uns, für den gemeinsamen Grenzwert eine Bezeichnung einzuführen.

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to\infty} S(Z_n, \boldsymbol{\xi}^{(n)}),$$

wobei Z_n und $\boldsymbol{\xi}^{(n)}$ wie in der Definition der Riemann-Integrierbarkeit beschrieben gewählt wurden.

2.3. *Bemerkung.* Bernhard Riemann [1826-1866]...

Bevor wir zur Beantwortung des in der Einleitung aufgeworfenen Problems zurückkehren, wollen wir uns ein wenig mit dem Begriff und den Grundeigenschaften des Riemann-Integrals beschäftigen, da aus der komplizierten Definition vielleicht etwas schwer ersichtlich ist, worum es eigentlich geht. Aus dem Begriff des Folgengrenzwerts ergibt sich sofort die folgende Umformulierung.

2.4. **Behauptung.** *Es gilt genau dann, dass $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist und $S = \int_a^b f(x)dx$, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede Zerlegung mit $|Z| < \delta$ und jeden beliebigen dazugehörigen Stützstellenvektor $\boldsymbol{\xi}$ gilt:*

$$|S(Z, \boldsymbol{\xi}) - S| < \varepsilon.$$

Auch das Cauchy-Kriterium lässt sich mühelos umformulieren.

[3]Diese Bezeichnung taucht wahrscheinlich nirgendwo anders auf und ist vielleicht nicht sehr glücklich. Ich bin dankbar, wenn jemand einen besseren Vorschlag hat.

2.5. **Behauptung** (Cauchy-Kriterium). *Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für alle Zerlegungen $|Z_1|$, $|Z_2| < \delta$ und beliebige dazugehörige Stützstellenvektoren $\boldsymbol{\xi}^{(1)}$ und $\boldsymbol{\xi}^{(2)}$ gilt:*

$$\left| S(Z_1, \boldsymbol{\xi}^{(1)}) - S(Z_2, \boldsymbol{\xi}^{(2)}) \right| < \varepsilon.$$

Um unsere Notationen weiter zu vereinfachen, führen wir Symbole für Mengen von Funktionen mit bestimmten Eigenschaften ein, die auf einem gegebenen Intervall $[a,b]$ definiert sind.

$$\begin{aligned} R[a,b] &:= \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,:\, D(f) = [a,b],\ f \text{ Riemann-integrierbar } \}, \\ C[a,b] &:= \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,:\, D(f) = [a,b],\ f \text{ stetig } \}, \\ B[a,b] &:= \{ f : [a,b] \to \mathbb{R} \,:\, D(f) = [a,b],\ f \text{ beschränkt } \}. \end{aligned}$$

Nach dem bisher Gelernten sind $C[a,b]$ und $B[a,b]$ Vektorräume und es gilt $C[a,b] \subset B[a,b]$.

2.6. **Behauptung.** *Wenn $f, g \in R[a,b]$, dann gilt für beliebige $c, d \in \mathbb{R}$, dass $(cf + dg) \in R[a,b]$ und*

$$\int_a^b (cf(x) + dg(x))dx = c \int_a^b f(x)dx + d \int_a^b g(x)dx.$$

$R[a,b]$ ist also ein Vektorraum und das Integral ist linear, d.h. $\int \in \mathrm{Hom}(R[a,b], \mathbb{R})$.

Beweis. Sei Z eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ und $\boldsymbol{\xi}$ ein beliebiger dazugehöriger Stützstellenvektor. Anhand der Definitionen ist leicht ersichtlich, dass dann

$$S(cf + dg, Z, \boldsymbol{\xi}) = cS(f, Z, \boldsymbol{\xi}) + dS(g, Z, \boldsymbol{\xi}).$$

Die Behauptung folgt aus der Definition des Riemann-Integrals. □

Es ist wichtig, dass das Integral monoton ist.

2.7. **Behauptung.** *Sei $f, g \in R[a,b]$ und $f(x) \geq g(x)$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx.$$

Speziell, wenn $f \geq 0$, dann ist $\int_a^b f(x)dx \geq 0$, also ist das Integral positiv.

Wenn zwei integrierbare Funktionen sich nicht stark voneinander unterscheiden, dann auch ihr Integral nicht.

2.8. **Behauptung.** *Sei $f, g \in R[a,b]$ und nehmen wir an, dass eine Menge $D \subset [a,b]$ existiert, für die $\overline{D} = [a,b]$ gilt, d.h. D ist dicht, und für alle $x \in D$ gilt $f(x) = g(x)$. Dann*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Beweis. Wir wählen die Koordinaten des Vektors $\boldsymbol{\xi}$ aus der Menge D, somit

$$S(f, Z, \boldsymbol{\xi}) = S(g, Z, \boldsymbol{\xi}).$$

□

Eine wichtige Folgerung dieser Aussage ist, dass die Dirichlet-Funktion nicht Riemann-integrierbar sein kann.

Wir schließen die Untersuchung der direkten Folgerungen aus der Definition mit einer Grundeigenschaft ab, die für das Folgende sehr wichtig ist.

2.9. **Behauptung.** *Die Riemann-integrierbaren Funktionen sind beschränkt, d.h. $R[a,b] \subset B[a,b]$.*

Beweis. Wir nehmen indirekt an, dass ein $f \in R[a,b]$ existiert, sodass $f \notin B[a,b]$, d.h. f ist nicht beschränkt. Der Einfachheit halber nehmen wir an, dass $\sup_{x\in[a,b]} f(x) = +\infty$. Dann existiert ein $z_0 \in [a,b]$, sodass für jede Zahl $\varepsilon > 0$ gilt

$$\sup\{f(x) \,:\, x \in B(z_0,\varepsilon) \cap [a,b]\} = +\infty.$$

Diese letztere Aussage folgt aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß auf folgende Weise. Sei z_k eine Folge, für die $f(z_k) > k$ für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$ gilt. Eine solche existiert, da f unbeschränkt ist. Nach dem Satz von Bolzano-Weierstraß hat diese Folge einen Häufungspunkt, bezeichne z_0 einen solchen Häufungspunkt. Dieser Punkt besitzt offensichtlich die obige Eigenschaft.

Sei $Z = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ eine feste Zerlegung des Intervalls $[a,b]$. Dann existiert ein $m \in \{1, 2, \ldots, n\}$, sodass $z_0 \in I_m = [x_{m-1}, x_m]$. Der Einfachheit halber können wir annehmen, dass wir eine Zerlegung Z gewählt haben, sodass $z_0 \in \operatorname{int} I_m = (x_{m-1}, x_m)$.

Sei $K > 0$ beliebig und $\boldsymbol{\xi}$ ein beliebig zur Zerlegung Z gewählter Stützstellenvektor. Bezeichne

$$I' := \sum_{k=1, k\neq m}^{n} f(\xi_k)|I_k|.$$

Dann existiert aufgrund der Wahl des Punktes z_0 ein $z \in (x_{m-1}, x_m)$, sodass $f(z) > \frac{K-I'}{|I_m|}$. Sei $\boldsymbol{\xi'}$ jener Stützstellenvektor, für den $\xi'_k = \xi_k$ wenn $k \neq m$ und $\xi'_m = z$. Dann ist

$$S(Z, \boldsymbol{\xi'}) = \sum_{k=1}^{n} f(\xi'_k)|I_k| > I' + (K - I') = K.$$

Zu einer festen Zerlegung Z existiert also für jede beliebige Zahl $K > 0$ ein Stützstellenvektor $\boldsymbol{\xi'}$, sodass für die zugehörige Riemann-Näherungssumme $S(Z, \boldsymbol{\xi'}) > K$ gilt. Für die Riemann-Integrierbarkeit ist es jedoch erforderlich, dass die zur Funktion f gehörenden Riemann-Näherungssummen eine beschränkte Menge bilden, somit widerspricht dies unserer indirekten Annahme. □

Die Dirichlet-Funktion kann ein Beispiel dafür sein, dass $R[a,b] \neq B[a,b]$, d.h. die Inklusion in der obigen Aussage ist echt. Bei einer beschränkte Funktion spielt ihr Supremum eine wichtige Rolle, daher führen wir dafür eine eigene Bezeichnung ein. Für eine Funktion $f \in B[a,b]$ sei

$$\|f\|_\infty := \sup\{|f(x)| \,:\, x \in [a,b]\}.$$

Dies wird üblicherweise als die *Unendlichkeits-* oder *Supremumsnorm* der Funktion f bezeichnet.

2.10. **Korollar.** *Sei $f \in R[a,b]$. Dann gilt*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \|f\|_\infty \cdot (b-a).$$

Beweis. Aus der vorherigen Behauptung wissen wir, dass $f \in B[a,b]$. Sei Z eine beliebige Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ und $\boldsymbol{\xi}$ ein dazugehöriger Stützstellenvektor. Die gewünschte Ungleichung folgt aus der offensichtlichen Beziehung

$$|S(f, Z, \boldsymbol{\xi})| \leq S(|f|, Z, \boldsymbol{\xi}) \leq \|f\|_\infty (b-a).$$

□

Schließlich erwähnen wir, dass die Definition über Riemann-Näherungssummen auf natürliche Weise auch auf den Fall erweitert werden kann, wenn $b < a$. Unter Verwendung dieser Konvention erhalten wir die sehr wichtige Beziehung, dass

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

Wir können auch einpunktige Intervalle zulassen; auf diese können wir den Integralbegriff mit der trivialen Beziehung

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

erweitern.

Es ist wichtig zu erwähnen, dass die vielleicht wichtigste anschauliche Bedeutung des Riemann-Integrals mit der Flächenberechnung zusammenhängt. Den Flächeninhalt von ebenen Figuren haben wir bisher im Allgemeinen nicht definiert, dies werden wir im nächsten Semester tun. Jetzt bemerken wir nur, wie es sich lohnt, unter Verwendung der anschaulichen Bedeutung des Riemann-Integrals den Flächeninhalt einer speziellen, von einem Funktionsgraphen begrenzten Figur zu definieren. Sei $D(f) = [a, b]$, $f(x) \geq 0$ und sei f Riemann-integrierbar. Bezeichne $M(f) := \big\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \;:\; a \leq x \leq y,\, 0 \leq y \leq f(x)\big\}$. Den *Flächeninhalt* der ebenen Figur $M(f)$ definiert man als

$$T(M(f)) := \int_a^b f(x)dx.$$

Aus Platzmangel können wir hierzu nicht mehr sagen, wird später in mehr Detail behandelt. Nun kehren wir zur Behandlung des in der Einleitung aufgeworfenen Problems zurück. Der folgende Satz ist das bedeutendste Ergebnis der gesamten Integralrechnung.

2.11. **Satz** (Newton-Leibniz-Formel). *Sei $D(F) = [a, b]$ ein Intervall und F differenzierbar. Wenn $F'(x) = f(x)$ Riemann-integrierbar oder stetig ist, dann gilt*

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Beweis. Sei f Riemann-integrierbar. Wir wiederholen den in der Einleitung dargelegten Gedankengang. Sei $Z_k = \{x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, \ldots x_{n_k}^{(k)}\}$ eine Folge von Zerlegungen des Intervalls $[a, b]$, für die $|Z_k| \to 0$. Durch Anwendung des Mittelwertsatzes von Lagrange existiert in jedem Intervall $I_m^{(k)}$ ein $\eta_m^{(k)} \in (x_{m-1}^{(n)}, x_m^{(n)})$, sodass

$$F'(\eta_m^{(k)}) = f(\eta_m^{(k)}) = \frac{F(x_m^{(k)}) - F(x_{m-1}^{(k)})}{x_m^{(k)} - x_{m-1}^{(k)}}.$$

Sei $\boldsymbol{\eta^{(k)}} := (\eta_1^{(k)}, \eta_2^{(k)}, \ldots, \eta_{n_k}^{(k)})$. Dann ist

$$S(Z_k, \boldsymbol{\eta^{(k)}}) = \sum_{m=1}^{n_k} f(\eta_m^{(k)})(x_m^{(k)} - x_{m-1}^{(k)}) = \sum_{m=1}^{n_k} \Big(F(x_m^{(k)}) - F(x_{m-1}^{(k)})\Big) = F(b) - F(a)$$

für jede Zahl $k \in \mathbb{N}$, da $x_0^{(k)} = a$ und $x_{n_k}^{(k)} = b$. Da

$$\lim_{k\to\infty} S(Z_k, \boldsymbol{\eta^{(k)}}) = \int_a^b f(x)dx,$$

erhalten wir, dass

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Nehmen wir nun an, dass f stetig ist. Dann ist nach dem Satz von Heine f auch gleichmäßig stetig, d.h. zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für jedes Zahlenpaar $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt, dass $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$. Wenn Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$ ist, für die $|Z| < \delta$, und $\boldsymbol{\xi}$ ein beliebiger dazugehöriger Stützstellenvektor ist, dann ist

$$|F(b) - F(a) - S(Z, \boldsymbol{\xi})| = \left|\sum_{m=1}^{n} (f(\eta_m) - f(\xi_m))\,|I_m|\right| < \frac{\varepsilon}{b-a} \cdot \sum_{m=1}^{n} |I_m| = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon,$$

wobei wir die Punkte η_m wie oben durch Anwendung des Mittelwertsatzes von Lagrange gewählt haben. □

2.12. *Bemerkung.* Isaac Newton [1642-1727] ...

Wir haben also gesehen, dass bestimmte Integrale unter bestimmten Umständen mit den Stammfunktionen in Verbindung gebracht werden können. Es ist wichtig zu erwähnen (und in der Prüfung Beispiele dafür zu bringen...), dass allein die Tatsache, dass f Riemann-integrierbar ist, noch nicht bedeutet, dass sie eine Stammfunktion hat, und dass es vorkommen kann, dass f eine Stammfunktion hat, aber dennoch nicht Riemann-integrierbar ist. Im verbleibenden Teil des Kapitels versuchen wir, den Begriff des Riemann-Integrals zu verstehen und brauchbare Kriterien für die Riemann-Integrierbarkeit anzugeben.

Wir haben gerade gesehen, dass Ableitungsfunktionen, die stetig sind, auch Riemann-integrierbar sind. Unser nächstes Ziel wird es sein zu zeigen, dass jede stetige Funktion Riemann-integrierbar ist. Damit wird natürlich der Beweis des zweiten Teils des vorherigen Satzes überflüssig.

Bevor wir fortfahren, ist es nützlich, einen Begriff einzuführen, der bei der Untersuchung der Stetigkeit hilfreich ist.

2.13. **Definition.** Sei $D(f) = [a, b]$, $H \subset [a, b]$. Die *Oszillation* der Funktion f auf der Menge H ist der Ausdruck
$$\Omega_f(H) := \sup f(H) - \inf f(H) = \sup\{|f(x) - f(y)| \,:\, x, y \in H\}$$
.

Aus der Definition folgt, dass für jede feste Zahl $x \in [a, b]$ die Funktion
$$0 < \delta \mapsto \Omega_f(B(x, \delta) \cap [a, b])$$
monoton wächst. Da eine monotone Funktion in jedem Punkt einen Grenzwert hat, ist folgendes sinnvoll.

2.14. **Definition.** Sei $D(f) = [a, b]$, $x \in [a, b]$. Die *Oszillation im Punkt* x der Funktion f ist
$$\omega_f(x) := \lim_{\delta\to 0+} \Omega_f(B(x, \delta) \cap [a, b]) \geq 0.$$

Die Oszillation in einem Punkt ist eng mit dem Begriff der Stetigkeit verbunden.

2.15. **Satz.** *Die Funktion $f \in B[a, b]$ ist genau dann im Punkt $x \in [a, b]$ stetig, wenn $\omega_f(x) = 0$.*

Beweis. Nehmen wir an, dass f im Punkt $x \in [a, b]$ stetig ist. Dann existiert zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$, sodass für jeden Punkt $y \in B(x, \eta) \cap [a, b]$ gilt $|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Also gilt für alle $y, z \in B(x, \eta) \cap [a, b]$
$$|f(y) - f(z)| \leq |f(y) - f(x)| + |f(x) - f(z)| < \varepsilon,$$
d.h. $\Omega_f(B(x, \eta) \cap [a, b]) \leq \varepsilon$.

Da $\Omega_f(B(x, \delta) \cap [a, b])$ eine monotone Funktion von δ ist, ist für alle $0 < \delta \leq \eta$ erfüllt, dass $\Omega_f(B(x, \delta) \cap [a, b]) \leq \varepsilon$. Folglich ist $\lim_{\delta\to 0+} \Omega_f(B(x, \delta) \cap [a, b]) = 0$.

Umgekehrt, wenn wir annehmen, dass $\omega_f(x) = 0$, dann folgt, dass zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass $\Omega_f(B(x, \delta) \cap [a, b]) < \varepsilon$, also für jedes $y \in B(x, \delta) \cap [a, b]$ gilt aufgrund der Definition der Zahl Ω_f, dass $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. □

Im Folgenden benötigen wir den Begriff der Verfeinerung einer Zerlegung. Sei $[a, b]$ ein nicht-entartetes Intervall. Wir sagen, dass die Zerlegung Z' eine *Verfeinerung* der Zerlegung Z ist, wenn $Z' \supset Z$. Offensichtlich ist dann $|Z'| \leq |Z|$. Wenn Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen sind, dann nennen wir die Zerlegung $Z = Z_1 \cup Z_2$ ihre *gemeinsame Verfeinerung*.

2.16. **Lemma.** *Sei $f \in B[a, b]$ und sei Z eine Zerlegung des Intervalls $[a, b]$. Nehmen wir ferner an, dass ein $K > 0$ existiert, sodass $\Omega_f(I_k) \leq K$ für alle $k = 1, 2, \ldots, n$ gilt, wobei I_k das zur Zerlegung Z gehörende Teilintervall ist. Wenn Z' eine Verfeinerung von Z ist, dann gilt für alle Stützstellenvektoren $\boldsymbol{\xi}$ und $\boldsymbol{\xi'}$*
$$|S(Z, \boldsymbol{\xi}) - S(Z', \boldsymbol{\xi'})| \leq K(b - a).$$

Beweis. Seien $I_1, I_2, \ldots I_n$ die Teilintervalle der Zerlegung Z und $I'_1, I'_2, \ldots, I'_m$ die der Zerlegung Z'. Da Z' eine Verfeinerung von Z ist, ist $m \geq n$ und es existieren Zahlen $m_0 = 0, m_1, m_2, \ldots, m_n = m$, für die $I_k = I'_{m_{k-1}+1} \cup I'_{m_{k-1}+2} \cup \cdots \cup I'_{m_k}$ gilt. Also
$$\begin{aligned}\left| f(\xi_k)|I_k| - \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} f(\xi'_i)|I'_i| \right| &= \left| \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} f(\xi_k)|I'_i| - \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} f(\xi'_i)|I'_i| \right| \\ &\leq \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |f(\xi_k) - f(\xi'_i)| \cdot |I'_i| \leq K \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} |I'_i| = K|I_k|.\end{aligned}$$

Daraus folgt jedoch, dass

$$|S(Z,\boldsymbol{\xi}) - S(Z',\boldsymbol{\xi'})| = \left|\sum_{k=1}^{n}\left(f(\xi_k)|I_k| - \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} f(\xi_i')|I_i'|\right)\right|$$
$$\leq \sum_{k=1}^{n}\left|f(\xi_k)|I_k| - \sum_{i=m_{k-1}+1}^{m_k} f(\xi_i')|I_i'|\right| \leq K\sum_{k=1}^{n}|I_k| = K(b-a).$$

□

2.17. **Satz.** *Jede auf einem abgeschlossenen Intervall definierte stetige Funktion ist Riemann-integrierbar, d.h.* $C[a,b] \subset R[a,b]$.

Beweis. Sei $f \in C[a,b]$. Nach dem Satz von Heine ist f auch gleichmäßig stetig, was wir unter Verwendung des Oszillationsbegriffs folgendermaßen formulieren können. Zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für jedes Intervall $J \subset [a,b]$, für das $|J| < \delta$, erfüllt ist, dass $\Omega_f(J) < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Seien Z_1 und Z_2 zwei Zerlegungen, deren Feinheit $|Z_1|, |Z_2| < \delta$ ist, und bezeichne Z ihre gemeinsame Verfeinerung. Durch Wahl beliebiger dazugehöriger Stützstellenvektoren $\boldsymbol{\xi_1}$, $\boldsymbol{\xi_2}$ und $\boldsymbol{\xi}$ erhalten wir unter Anwendung des vorherigen Hilfssatzes, dass

$$|S(Z_1,\boldsymbol{\xi_1}) - S(Z_2,\boldsymbol{\xi_2})| \leq |S(Z_1,\boldsymbol{\xi_1}) - S(Z,\boldsymbol{\xi})| + |S(Z,\boldsymbol{\xi}) - S(Z_2,\boldsymbol{\xi_2})|$$
$$\leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(b-a) = \varepsilon.$$

Mit der Umformulierung des Riemann-Integrals durch das Cauchy-Kriterium erhalten wir die Behauptung. □

Wir werden später beim Lebesgue-Kriterium sehen, dass die Stetigkeit in engem Zusammenhang mit der Integrierbarkeit steht. Es lässt sich leicht beweisen, dass das Integral einer stetigen Funktion intervalladditiv ist. Später werden wir dies für das Integral einer beliebigen Funktion sehen.

2.18. **Korollar.** *Sei* $f \in C[a,b]$. *Dann ist* f *auf jedem abgeschlossenen Teilintervall des Intervalls* $[a,b]$ *integrierbar und für jedes Zahlentripel* $a_1, a_2, a_3 \in [a,b]$ *gilt*

$$\int_{a_1}^{a_3} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)dx.$$

2.19. **Korollar.** *Jede Funktion* $f \in C[a,b]$ *besitzt eine Stammfunktion, zum Beispiel*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt.$$

Beweis. Da in diesem Fall f auf jedem Teilintervall des Intervalls $[a,b]$ Riemann-integrierbar ist, ist die obige Definition sinnvoll. Wir zeigen, dass die so definierte Funktion F in einem beliebigen Punkt $x_0 \in [a,b]$ differenzierbar ist. Sei also $x_0 \in [a,b]$ fest und $x \in [a,b]$, $x \neq x_0$. Nach dem vorherigen Korollar gilt

$$\int_a^{x_0} f(t)dt + \int_{x_0}^x f(t)dt = \int_a^x f(t)dt, \text{ also umgestellt } F(x) - F(x_0) = \int_{x_0}^x f(t)dt.$$

Da

$$\int_{x_0}^x f(x_0)dt = f(x_0)\cdot\int_{x_0}^x 1dt = f(x_0)(x-x_0),$$

erhalten wir, dass

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x-x_0}\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))dt.$$

Wir müssen zeigen, dass dieser Ausdruck gegen null konvergiert, wenn x gegen x_0 strebt. Dazu nutzen wir die Stetigkeit von f, die wir bisher nicht direkt verwendet haben. Laut Voraussetzung existiert zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für jeden Punkt $t \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [a,b]$

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

gilt. Sei $|x - x_0| < \delta$, dann ist

$$\left| \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) \right| \leq \frac{1}{|x - x_0|} \int_{x_0}^{x} |f(t) - f(x_0)| dt < \frac{1}{|x - x_0|} \varepsilon |x - x_0| = \varepsilon.$$

Also existiert $F'(x_0) = f(x_0)$. ☐

Eine wichtige Folgerung aus dem Bisherigen ist der Mittelwertsatz.

2.20. **Behauptung.** *Sei $f \in C[a,b]$. Dann gibt es ein $\xi \in (a,b)$, sodass*

$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Beweis. Es gilt, dass

$$\min_{[a,b]} f \cdot (b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq \max_{[a,b]} f \cdot (b-a).$$

Da f stetig ist, können wir den Satz von Bolzano anwenden, um die Existenz eines ξ mit der gewünschten Eigenschaft zu zeigen. ☐

2.21. *Bemerkung.* Die Existenz der Stammfunktion einer stetigen Funktion und der Mittelwertsatz sind äquivalent. Aus dem Ersten folgt das Zweite mit dem Mittelwertsatz von Lagrange, aus dem Zweiten das Erste mit einfachen Stetigkeitsüberlegungen.

Im Folgenden benötigen wir die Begriffe der unteren und oberen Näherungssumme. Führen wir dazu die folgenden Bezeichnungen ein. Sei $f \in B[a,b]$, Z eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$, $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ ein Teilintervall davon. Bezeichne

$$m_k := \inf f(I_k) = \inf\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

und

$$M_k := \sup f(I_k) = \sup\{f(x) \,:\, x \in [x_{k-1}, x_k]\}.$$

2.22. **Definition.** Unter der zur Zerlegung Z gehörenden *unteren Näherungssumme* verstehen wir den Ausdruck

$$s(Z) := \sum_{k=1}^{n} m_k |I_k|$$

und unter der zur Zerlegung Z gehörenden *oberen Näherungssumme* verstehen wir den Ausdruck

$$S(Z) := \sum_{k=1}^{n} M_k |I_k|.$$

Es ist wichtig zu bemerken, dass dies im Allgemeinen nicht unbedingt Riemann-Näherungssummen sind, da nichts garantiert, dass das gegebene Infimum und Supremum angenommen wird. Es lassen sich jedoch immer beliebig nahe Funktionswerte finden. Die unteren und oberen Näherungssummen sind sehr praktisch, da sie über sehr wichtige Monotonieeigenschaften verfügen, die allgemeine Riemann-Näherungssummen nicht haben.

2.23. **Lemma.** *Sei $f \in B[a,b]$. Dann gelten die folgenden Eigenschaften.*

(a) Wenn Z eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ ist, dann gilt $s(Z) \leq S(Z)$.
(b) Wenn Z eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ ist und $Z' \supset Z$, dann gilt $s(Z) \leq s(Z')$.
(c) Wenn Z eine Zerlegung des Intervalls $[a,b]$ ist und $Z' \supset Z$, dann gilt $S(Z) \geq S(Z')$.
(d) Wenn Z_1 und Z_2 beliebige Zerlegungen des Intervalls $[a,b]$ sind, dann gilt $s(Z_1) \leq S(Z_2)$.

Beweis. Aussage (a) ist nach Definition offensichtlich. Der Beweis der Aussagen (b) und (c) verläuft Wort für Wort gleich, weshalb wir hier nur (b) beweisen. Da die Zerlegung Z' eine Verfeinerung der Zerlegung Z ist, haben wir sie so erhalten, indem wir der Zerlegung Z endlich viele Punkte hinzugefügt haben. Daher reicht es eigentlich, den Fall zu untersuchen, in dem die Zerlegung Z' genau einen Punkt mehr enthält als die Zerlegung Z; der allgemeine Fall ergibt sich durch endlich viele Wiederholungen dieses Gedankengangs. Sei also $Z' = Z \cup \{x'\}$, $x_{j-1} < x' < x_j$. Bezeichne ferner $\mu_1 := \inf f([x_{j-1}, x'])$ und $\mu_2 := \inf f([x', x_j])$. Somit ist $m_j \leq \mu_1, \mu_2$, also

$$m_j(x_j - x_{j-1}) = m_j(x' - x_{j-1}) + m_j(x_j - x') \leq \mu_1(x' - x_{j-1}) + \mu_2(x_j - x')$$

Daraus folgt, dass für die unteren Näherungssummen gilt:

$$s(Z) = \sum_{k=1}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) \leq \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{n} m_k(x_k - x_{k-1}) + \mu_1(x' - x_{j-1}) + \mu_2(x_j - x') = s(Z').$$

Zum Beweis der Aussage (d) bezeichne $Z = Z_1 \cup Z_2$ die gemeinsame Verfeinerung der Zerlegungen Z_1 und Z_2. Durch Anwendung der Aussagen (a), (b) und (c) erhalten wir, dass

$$s(Z_1) \leq s(Z) \leq S(Z) \leq S(Z_2).$$

□

Die unteren Näherungssummen bilden also eine nach oben, die oberen Näherungssummen eine nach unten beschränkte Menge. Dies zeigt die Berechtigung der folgenden Definition.

2.24. **Definition.** Sei $f \in B[a, b]$. Unter dem *unteren Integral* der Funktion f verstehen wir den Ausdruck

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\{s(Z) \,:\, Z \text{ ist eine Zerlegung des Intervalls } [a, b]\}$$

und unter ihrem *oberen Integral* verstehen wir den Ausdruck

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\{S(Z) \,:\, Z \text{ ist eine Zerlegung des Intervalls } [a, b]\}.$$

Jede beschränkte Funktion hat also ein unteres und ein oberes Integral, für die gilt, dass

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Eine ausgezeichnete Rolle spielen jene Funktionen, für die

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Diese Funktionen nennen wir *Darboux-integrierbare* Funktionen und diese obige Zahl nennen wir das Darboux-Integral der Funktion f.

2.25. **Satz.** *Die Funktion $f \in B[a, b]$ ist genau dann Darboux-integrierbar, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$ existiert, sodass $S(Z) - s(Z) < \varepsilon$.*

Beweis. Sei f Darboux-integrierbar und bezeichne $J := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Zu einer gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ existieren Zerlegungen Z_1 und Z_2, sodass

$$J - s(Z_1) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad S(Z_2) - J < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sei $Z = Z_1 \cup Z_2$. Durch Anwendung des vorherigen Hilfssatzes erhalten wir, dass

$$S(Z) \leq S(Z_2) < J + \frac{\varepsilon}{2} < s(Z_1) + \varepsilon \leq s(Z) + \varepsilon, \quad \text{also} \quad S(Z) - s(Z) < \varepsilon.$$

Umgekehrt, wenn zu einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z existiert, sodass $S(Z) - s(Z) < \varepsilon$, und man ausnutzt, dass

$$s(Z) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq S(Z),$$

erhält man die Ungleichung

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$$

für jede Zahl $\varepsilon > 0$. Dies kann nur erfüllt sein, wenn f Darboux-integrierbar ist. □

Den Begriff des Darboux-Integrals haben wir eingeführt, um das Riemann-Integral besser zu verstehen. Es gilt nämlich Folgendes.

2.26. **Satz.** *Die Funktion $f \in B[a,b]$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie Darboux-integrierbar ist. In diesem Fall gilt*

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Beweis. Sei $f \in R[a,b]$ und bezeichne $S := \int_a^b f(x)dx$. Wir erinnern daran, dass nach Behauptung 2.9 f beschränkt ist und nach Behauptung 2.4 zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede Zerlegung Z, für die $|Z| < \delta$ ist, und für jeden beliebigen dazugehörigen Stützstellenvektor

$$S - \frac{\varepsilon}{2} < S(Z, \boldsymbol{\xi}) < S + \frac{\varepsilon}{2}$$

gilt. Da $\boldsymbol{\xi}$ ein beliebiger Stützstellenvektor war, gilt daher

$$S - \frac{\varepsilon}{2} \leq s(Z) \leq S(Z) \leq S + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{also} \quad S(Z) - s(Z) \leq \varepsilon.$$

Also ist f Darboux-integrierbar.

Umgekehrt, nehmen wir an, dass f Darboux-integrierbar ist, und bezeichne $J := \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx$. Laut Voraussetzung existiert zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z_1 des Intervalls $I := [a,b]$, sodass

$$S(Z_1) - s(Z_1) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir zeigen, dass ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jede Zerlegung Z, für die $|Z| < \delta$, erfüllt ist, dass

$$S(Z) - s(Z) < \varepsilon.$$

Sei nämlich $Z_2 := Z \cup Z_1$, wobei Z eine solche Zerlegung ist. Der Schlüssel zum Beweis wird die Umformung

$$S(Z) - s(Z) = (S(Z) - S(Z_2)) + (S(Z_2) - s(Z_2)) + (s(Z_2) - s(Z))$$

sein. Da Z_2 eine Verfeinerung von Z_1 ist, gilt nach Hilfssatz 2.23

$$(S(Z_2) - s(Z_1)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Wir müssen die Zahl δ geschickt so wählen, dass für $|Z| < \delta$ auch der erste und dritte Summand kleiner als $\frac{\varepsilon}{3}$ sind. Bezeichne p die Anzahl der Intervalle der Zerlegung Z_1. Die Zerlegung Z_2 haben wir aus der Zerlegung Z erhalten, indem wir höchstens p neue Punkte zur Zerlegung Z_1 hinzugefügt haben. Nach dem Schubfachprinzip teilen wir also höchstens p Intervalle der Zerlegung Z weiter auf. Wenn wir also den Hilfssatz 2.16 p-mal auf beliebige Stützstellenvektoren $\boldsymbol{\xi}$ und $\boldsymbol{\xi_2}$ anwenden, erhalten wir, dass

$$|S(Z, \boldsymbol{\xi}) - S(Z_2, \boldsymbol{\xi_2})| < p\Omega_f(I)\delta.$$

Da die Stützstellenvektoren $\boldsymbol{\xi}$ und $\boldsymbol{\xi_2}$ beliebig wählbar sind, gilt somit

$$|S(Z) - S(Z_2)| \leq p\Omega_f(I)\delta, \quad \text{und} \quad |s(Z) - s(Z_2)| \leq p\Omega_f(I)\delta.$$

Wählen wir $\delta := \frac{\varepsilon}{3p\Omega_f(I)}$, dann ist für jede Zerlegung Z, für die $|Z| < \delta$, erfüllt, dass

$$S(Z) - s(Z) < \varepsilon.$$

Für eine solche Zerlegung Z und die Wahl eines beliebigen Stützstellenvektors $\boldsymbol{\xi}$ ist erfüllt, dass

$$s(Z) \leq S(Z, \boldsymbol{\xi}) \leq S(Z),$$

also

$$|S(Z, \boldsymbol{\xi}) - J| < \varepsilon.$$

Hieraus folgt mit der entsprechenden Umformulierung der Riemann-Integrierbarkeit, dass $f \in R[a, b]$. □

2.27. **Korollar.** *Es gilt genau dann $f \in R[a, b]$, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z des Intervalls $[a, b]$ existiert, sodass $S(Z) - s(Z) < \varepsilon$.*

Schließlich skizzieren wir, wie man die Riemann-Integrierbarkeit mit dem Begriff der Stetigkeit charakterisieren kann. Dazu benötigen wir den Begriff der Nullmenge.

2.28. **Definition.** Wir sagen, dass die Menge $H \subset \mathbb{R}$ vom *Maß null* oder eine *Nullmenge* ist, wenn es zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ endlich oder abzählbar unendlich viele Intervalle I_k gibt, für die $H \subset \cup I_k$ gilt, also die H überdecken, und deren Gesamtlänge kleiner als ε ist, d.h. $\sum |I_k| < \varepsilon$.

Wir erinnern daran, dass eine Menge H abzählbar unendlich ist, wenn eine Bijektion $f : \mathbb{N} \to H$ existiert, das heißt, die Elemente von H lassen sich paarweise der Menge der natürlichen Zahlen zuordnen, H hat "genauso vieleËlemente wie $\mathbb{N}$. Eine Menge wird abzählbar genannt, wenn sie endlich oder abzählbar unendlich ist. In der Praxis pflegen wir mit folgendem sehr nützlichen Kriterium zu entscheiden, ob eine Menge abzählbar ist:

Eine Menge H ist genau dann abzählbar, wenn eine surjektive Funktion $f : \mathbb{N} \to H$ existiert.

2.29. **Lemma.**
(1) Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge.
(2) Endliche und abzählbar unendliche Mengen sind Nullmengen.
(3) Die abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist eine Nullmenge.
(4) (Borel) Ein Intervall, das aus mindestens zwei Punkten besteht, ist keine Nullmenge.

Beweis. Aussage (1) ist offensichtlich, (2) ist leicht zu beweisen: Sei $H := \{a_n : n \in \mathbb{N}\}$, für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ wird dies durch die abzählbar unendlich vielen Intervalle $(a_n - \frac{\varepsilon}{3^n}, a_n + \frac{\varepsilon}{3^n})$ überdeckt, deren Gesamtlänge kleiner als ε ist. Ähnlich lässt sich (3) einsehen: Wenn $M_1, M_2, \ldots$ abzählbar unendlich viele Nullmengen sind und $\varepsilon > 0$ eine gegebene Zahl ist, dann überdecken wir M_1 mit Intervallen $I_{11}, I_{12}, \ldots$ deren Gesamtlänge kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Dies wiederholend, werde die Menge M_j durch die Intervalle $I_{j1}, I_{j2}, \ldots$ überdeckt, für die $\sum_k |I_{jk}| < \frac{\varepsilon}{2^j}$ gilt. Da die Vereinigung abzählbar unendlich vieler abzählbarer Mengen wieder abzählbar ist, haben wir die Menge $\cup M_j$ mit abzählbar vielen Intervallen überdeckt, deren Gesamtlänge $\leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^j} = \varepsilon$ ist. Die letzte Aussage beweisen wir jetzt nicht, im Übrigen ist es eine sehr glaubhafte und natürliche Aussage. Um sie zu beweisen, muss man einsehen, dass, wenn wir ein Intervall I mit Intervallen I_j überdecken, immer $|I| \leq \sum |I_j|$ erfüllt ist. Es ist wichtig, dass wir zumindest einsehen, dass diese Aussage eines Beweises bedarf. □

Es ist wichtig anzumerken, dass es zwar einen engen Zusammenhang zwischen Nullmengen und Abzählbarkeit gibt, es aber Beispiele für Nullmengen gibt, die nicht abzählbar sind.

2.30. *Beispiel.* Cantor-Menge

Wenn für eine auf einem Intervall definierte Funktion eine Eigenschaft mit Ausnahme einer Nullmenge erfüllt ist, dann sagen wir, dass diese Eigenschaft *fast überall* erfüllt ist.

2.31. **Satz** (Lebesgue-Kriterium)**.** *Eine Funktion $f \in B[a, b]$ ist genau dann Riemann-integrierbar, wenn sie in fast allen Punkten stetig ist.*

Den Beweis dieses Satzes muss man für die Prüfung nicht kennen.

2.32. *Bemerkung.* Henri Lebesgue [1875-1941] ...

Wir fassen die wichtigsten Folgerungen des Lebesgue-Kriteriums zusammen. Diese folgen im Allgemeinen sofort aus den gelernten Aussagen über Stetigkeit und aus den Eigenschaften von Nullmengen.

2.33. **Korollar.**
- *Wenn $f \in B[a,b]$ mit Ausnahme von abzählbar vielen Punkten stetig ist, dann ist $f \in R[a,b]$. Also ist zum Beispiel auch die Riemann-Funktion Riemann-integrierbar.*
- *Wenn $g \in R[a,b]$ und f an endlich vielen Stellen von ihr abweicht, dann ist $f \in R[a,b]$ und $\int_a^b f = \int_a^b g$.*
- *Wenn $f \in R[a,b]$, dann ist f auf jedem abgeschlossenen Teilintervall des Intervalls $[a,b]$ Riemann-integrierbar und für jedes Zahlentripel $a_1, a_2, a_3 \in [a,b]$ gilt*
$$\int_{a_1}^{a_3} f(x)dx = \int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)dx.$$
- *Wenn $f \in R[a,b]$, dann ist $F(t) := \int_a^t f(x)dx$ eine Lipschitz-stetige Funktion. Letzteres folgt daraus, dass*
$$|F(t) - F(s)| = \left| \int_s^t f(x)dx \right| \leq \|f\|_\infty |t-s|.$$
- *Wenn $f \in R[a,b]$ und $f \in R[b,c]$, dann ist $f \in R[a,c]$.*
- *Wenn $f, g \in R[a,b]$, dann sind $|f|$, f^+, f^-, $\max(f,g)$, $\min(f,g)$, $fg \in R[a,b]$. Wenn $|g(x)| \geq \alpha > 0$, dann ist $\frac{f}{g} \in R[a,b]$.*
- *Wenn $g \in R[a,b]$, $g([a,b]) \subset [\alpha, \beta]$ und $f \in C[\alpha,\beta]$, dann ist $f \circ g \in R[a,b]$.*

Wir merken an (das Beispiel entfällt aus Zeitmangel), dass die letzte Aussage leider nicht wahr bleibt, wenn f nicht stetig, sondern nur Riemann-integrierbar ist.

3. Uneigentliches Integral

Sei $a \in \mathbb{R}$, $D(f) \supset [a, +\infty)$ ein Intervall und $f \in R[a,b]$ für jedes $b > a$. Unter dieser etwas saloppen Schreibweise verstehen wir, dass für jedes $b > a$ gilt $f|_{[a,b]} \in R[a,b]$, wobei $f|_{[a,b]}$ wie üblich die Einschränkung der Funktion f auf das Intervall $[a,b]$ bezeichnet. Wenn f beispielsweise stetig ist, dann ist dies garantiert der Fall. Allgemeiner, wenn $D(f) = I$ ein Intervall ist und für alle $\alpha, \beta \in I$ gilt $f \in R[\alpha, \beta]$, dann sagen wir, dass f *lokal integrierbar* ist.

Unter dem *uneigentlichen Integral* der Funktion f auf dem Intervall $[a, +\infty)$ verstehen wir den Ausdruck
$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(x)dx,$$
sofern der obige Grenzwert existiert. In diesem Fall sagen wir auch, dass das Integral konvergent ist. Ein uneigentliches Integral auf einem Intervall $(-\infty, b]$ können wir sinngemäß analog definieren.

3.1. *Beispiel.*
- $$\int_0^\infty e^{-x}dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b e^{-x}dx = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - e^{-b}\right) = 1.$$
- Existiert nicht:
$$\int_0^\infty \cos x dx = \lim_{b \to +\infty} \int_0^b \cos x dx = \lim_{b \to +\infty} \sin b.$$
- $$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2}dx = \lim_{b \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{b}\right) = 1.$$

Im Folgenden nehmen wir durchgehend an, dass $D(f) \supset [a, +\infty)$. Durch Umformulierung des Cauchy-Kriteriums für den Grenzwert von Funktionen erhalten wir Folgendes.

3.2. **Behauptung** (Cauchy-Kriterium). *Das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ existiert genau dann, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $K > a$ existiert, sodass für alle $t > s > K$ gilt:*
$$\left| \int_s^t f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

3.3. *Beispiel.* Wir zeigen, dass folgendes Integral existiert:

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx.$$

Wenn nämlich $0 < s < t$, dann

$$\int_s^t \frac{\sin x}{x} dx = \left[-\frac{\cos x}{x}\right]_s^t - \int_s^t \frac{\cos x}{x^2} dx.$$

Also

$$\left|\int_s^t \frac{\sin x}{x} dx\right| \leq \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \int_s^t \frac{1}{x^2} dx = \frac{1}{s} + \frac{1}{t} + \left[-\frac{1}{x}\right]_s^t = \frac{2}{s}.$$

Wenn also $s > \frac{2}{\varepsilon}$, dann ist $\left|\int_s^t \frac{\sin x}{x} dx\right| < \varepsilon$.

Später werden wir sehen, wenn es die Zeit erlaubt, dass

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

Wenn $f \geq 0$, dann wächst die Funktion $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ monoton, sie hat also genau dann einen Grenzwert, wenn sie beschränkt ist.

3.4. **Behauptung.** *Sei $f \geq 0$. Es existiert genau dann $\int_a^\infty f(x)dx$, wenn ein $M > 0$ existiert, sodass*

$$\int_a^b f(x)dx \leq M \qquad \text{für jedes } b > a \text{ gilt.}$$

Wir sagen, dass $\int_a^\infty f$ *absolut konvergent* ist, wenn $\int_a^\infty |f|$ existiert. Nach dem Cauchy-Kriterium ist ein absolut konvergentes Integral immer konvergent, da

$$\left|\int_s^t f(x)dx\right| \leq \int_s^t |f(x)|dx.$$

Wir können Analoga der bei unendlichen Reihen gelernten Kriterien formulieren, wie zum Beispiel das Majoranten- und das Minorantenkriterium.

Schließlich bemerken wir flüchtig, dass sich das uneigentliche Integral einer auf einem offenen Intervall definierten, lokal integrierbaren Funktion sinngemäß definieren lässt. Sei $D(f) \supset [a, b)$ ein Intervall und sei f lokal integrierbar. Sei

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{t \to b-} \int_a^t f(x)dx,$$

sofern der Grenzwert existiert. Für den linken Endpunkt funktioniert die Definition ähnlich.

Wir haben zuvor gesehen, dass, wenn $b \in D(f)$, wir, da $F(t) = \int_a^t f(x)dx$ (Lipschitz-)stetig ist, mit der obigen Definition das zuvor untersuchte Riemann-Integral zurückerhalten.

3.5. *Beispiel.*

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{t \to 1-} \int_0^t \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \lim_{t \to 0-} \arcsin t = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$