POTENZREIHEN, FUNKTIONENREIHEN

ANDRÁS BÁTKAI

Das primäre Ziel dieses Skripts ist es, die Analysis-Vorlesung für Lehramtsstudierende der Mathematik zu begleiten und bei der Prüfungsvorbereitung zu helfen. Das Skript kann Tippfehler enthalten; bitte mit Nachsicht behandeln und mir melden. Eventuelle Fehler entbinden niemanden von der Prüfungsleistung.

Der Vollständigkeit halber enthält das Kapitel über Funktionenreihen auch Bemerkungen und Behauptungen im Zusammenhang mit der Integration. Falls der Leser mit dem Begriff des Integrals noch nicht vertraut ist, kann er diese Abschnitte einfach überspringen.

Ich verweise regelmäßig auf früheres Material.

Im Folgenden wollen wir uns mit den Eigenschaften der sogenannten Potenzreihen, also unendlichen Reihen der Form $\sum(a_n x^n)$, beschäftigen. Dazu benötigen wir jedoch die Multiplikation von Reihen, womit wir das im ersten Semester über unendliche Reihen Gelernte wiederholen müssen.

0.1. **Definition.** Seien $\sum(a_n)$ und $\sum(b_n)$ unendliche Reihen. Unter dem *Cauchy-Produkt* dieser beiden Reihen verstehen wir die unendliche Reihe $\sum(c_n)$, für die gilt:

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0 = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Formal kann man sich das Cauchy-Produkt so vorstellen, als ob die unendlichen Reihen unendliche Summen wären, und bei ihrer Multiplikation jeder Term mit jedem Term multipliziert wird.

0.2. **Satz.** *Seien $\sum(a_n)$ und $\sum(b_n)$ absolut konvergente unendliche Reihen. Dann ist ihr Cauchy-Produkt absolut konvergent und es gilt:*

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\cdot\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right).$$

1. Potenzreihen

Im Folgenden wollen wir uns mit den Eigenschaften der sogenannten Potenzreihen, also unendlichen Reihen der Form $\sum(a_n(x-x_0)^n)$, beschäftigen. Ähnlich wie bei unendlichen (numerischen) Reihen ist nicht die Potenzreihe selbst, sondern ihre Summe von Interesse, daher definieren wir die Potenzreihe an dieser Stelle nicht weiter. Bei der Untersuchung der Funktion $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ betrachten wir zwei wichtige Fragen.

- $D(f) =?$, d.h. für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert $\sum(a_n(x-x_0)^n)$?
- Welche Eigenschaften besitzt die Funktion f?

Auf die erste Frage können wir relativ schnell eine fast vollständige Antwort geben.

1.1. **Satz** (Cauchy-Hadamard)**.** *Sei*

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{+0} = +\infty,\ \frac{1}{+\infty} = 0\right).$$

Wenn

$$|x-x_0| < r, \qquad \text{dann konvergiert } \sum(a_n(x-x_0)^n), \text{ wenn}$$
$$|x-x_0| > r, \qquad \text{dann divergiert } \sum(a_n(x-x_0)^n).$$

Im ersten Fall ist die Konvergenz absolut.

Date: 22. März 2026.

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}$ und wir wenden das Wurzelkriterium auf die Reihe $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ an. Demnach konvergiert die Reihe absolut, wenn

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} < 1.$$

Durch Umstellen erhalten wir die erste Behauptung.

Ebenso erhalten wir durch Anwendung des Divergenzkriteriums aus dem Wurzelkriterium, dass die Reihe divergiert, wenn

$$\limsup \sqrt[n]{|a_n(x-x_0)^n|} = |x-x_0| \cdot \limsup \sqrt[n]{|a_n|} > 1.$$

□

Die im vorherigen Satz auftretende Zahl r nennen wir den *Konvergenzradius* der Potenzreihe.

1.2. *Bemerkung.* Jacques Hadamard [1865–1963] war ein französischer Mathematiker. Er leistete im Laufe seines langen Lebens bedeutende Beiträge auf den Gebieten der Funktionentheorie, der Differentialgleichungen und der Funktionalanalysis.

Basierend auf dem im ersten Semester Gelernten können wir sofort die folgende Behauptung für den Konvergenzradius formulieren.

1.3. **Korollar.** *Falls der Grenzwert*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

existiert, dann gilt

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}.$$

Zusammenfassend konvergiert eine Potenzreihe immer auf einem symmetrischen Intervall mit Mittelpunkt x_0. In den inneren Punkten des Intervalls konvergiert sie absolut, während die Konvergenz an den Randpunkten separat untersucht werden muss. Aufgrund dessen sagt man üblicherweise, dass $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_0 ist. Da wir an den Randpunkten des Intervalls auf Probleme stoßen könnten, beschränken wir unsere Untersuchungen zur Vereinfachung der Diskussion im Folgenden für lange Zeit auf das Innere des Intervalls.

1.4. **Definition.** Die *Konvergenzmenge* der Potenzreihe $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ ist das Intervall

$$K := \left\{x \in \mathbb{R} : \sum(a_n(x-x_0)^n) \text{ konvergiert}\right\},$$

ihre *Summenfunktion* ist die Funktion

$$D(f) := \operatorname{int} K = (x_0 - r, x_0 + r) \qquad (r \neq 0)$$

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n.$$

Im Folgenden wollen wir uns mit den Eigenschaften der Summenfunktion der Potenzreihe beschäftigen. Hierfür wird der folgende sogenannte Transformationssatz grundlegend sein.

1.5. **Satz.** *Sei $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, d.h. $r > 0$, und sei $x_1 \in \operatorname{int} K = (x_0 - r, x_0 + r)$ beliebig. Dann gilt für jeden Punkt $x \in \operatorname{int} K$, für den $|x - x_1| < r - |x_1 - x_0|$ erfüllt ist, dass*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = \sum_{i=0}^{\infty} b_i(x-x_1)^i,$$

wobei

$$b_i = \sum_{n=i}^{\infty} \binom{n}{i} a_n(x_1-x_0)^{n-i}.$$

Beweis. Der Ausgangspunkt des Beweises ist die tiefe Aussage, dass

$$x - x_0 = (x - x_1) + (x_1 - x_0),$$

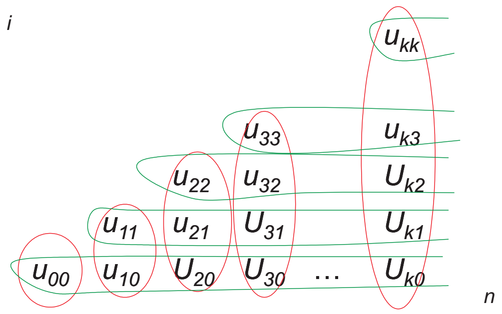
woraus nach dem binomischen Lehrsatz folgt:

$$(x - x_0)^n = [(x - x_1) + (x_1 - x_0)]^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i}.$$

Setzt man dies in die Potenzreihe ein, die nach Voraussetzung konvergent ist, so erhält man

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{n} a_n \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} u_{ni}.$$

Dies ist eine absolut konvergente Reihe, in der wir, unter Verwendung der Bezeichnungen der folgenden Abbildung, die Elemente in vertikalen (roten) Spalten summieren. Da eine absolut konvergente Reihe umgeordnet werden kann, erhalten wir das gleiche Ergebnis, wenn wir die Reihe in horizontalen (grünen) Zeilen summieren.



Also

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{n} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} u_{ni} = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{n=i}^{\infty} a_n \binom{n}{i} (x - x_1)^i (x_1 - x_0)^{n-i}$$
$$= \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x - x_1)^i.$$

□

Basierend auf den Operationen mit unendlichen Reihen ergibt sich sofort die folgende Behauptung.

1.6. **Behauptung.** *Seien $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ und $\sum(b_n(x - x_0)^n)$ zwei Potenzreihen mit den Konvergenzradien $r_1 > 0$ und $r_2 > 0$. Dann gilt*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n)(x - x_0)^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \ldots + a_0 b_n)(x - x_0)^n$$

für alle Zahlen x, für die $|x - x_0| < \min\{r_1, r_2\}$ gilt.

Somit bilden die Funktionen, die auf dem gegebenen Intervall als Potenzreihen geschrieben werden können, einen Ring. Im Folgenden untersuchen wir die wichtigsten analytischen Eigenschaften der Summenfunktion der Potenzreihe.

1.7. **Satz.** *Die Summenfunktion einer Potenzreihe ist stetig.*

Beweis. Wir erinnern daran, dass wir die Summenfunktion der Potenzreihe $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ auf dem offenen Intervall $(x_0 - r, x_0 + r)$ definiert haben, falls $r > 0$. Die Behauptung muss auch nur in diesem Fall bewiesen werden, da eine in nur einem Punkt definierte Funktion immer stetig ist.

Sei $x_1 \in (x_0 - r, x_0 + r)$ beliebig. Wir zeigen, dass f im Punkt x_1 stetig ist. Nach dem vorherigen Transformationssatz kann die Funktion f in einer hinreichend kleinen δ-Umgebung des Punktes x_1 als eine Potenzreihe um den Entwicklungspunkt x_1 geschrieben werden als

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i (x - x_1)^i.$$

Wir müssen also nur zeigen, dass

$$\lim_{x \to x_1} f(x) = b_0.$$

Dazu sei $0 < \rho < \delta$, dann ist nach Voraussetzung $\sum_{i=0}^{\infty} b_i \rho^i$ konvergent. Bezeichne

$$\sigma := \sum_{i=1}^{\infty} b_i \rho^{i-1}.$$

Wenn nun $|x - x_1| < \rho$, dann gilt

$$|f(x) - b_0| = \left| (x - x_1) \sum_{i=1}^{\infty} b_i (x - x_1)^{i-1} \right| \leq |x - x_1| \sigma,$$

woraus die Stetigkeit im Punkt x_1 sofort folgt.[1]

□

1.8. **Satz.** *Die Summenfunktion einer Potenzreihe* $\sum (a_n (x - x_0)^n)$ *mit positivem Konvergenzradius ist beliebig oft differenzierbar und es gilt:*

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x - x_0) + 3a_3(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} (x - x_0)^n,$$

$$f''(x) = 2a_2 + 2 \cdot 3a_3(x - x_0) + 3 \cdot 4(x - x_0)^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1) a_{n+2} (x - x_0)^n,$$

$$\vdots$$

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (n+k)(n+k-1) \ldots (n+1) a_{n+k} (x - x_0)^n.$$

Beweis. Sei $x_1 \in (x_0 - r, x_0 + r)$. Wenden wir den Gedankengang des vorherigen Beweises an, so erhalten wir

$$\frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1} = b_1 + b_2(x - x_1) + b_3(x - x_1)^2 + \ldots \to b_1, \quad \text{wenn } x \to x_1,$$

da nach dem vorherigen Satz jede Potenzreihe stetig ist. Nach dem Transformationssatz gilt

$$f'(x_1) = b_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \binom{n}{1} a_n (x_1 - x_0)^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} (x_1 - x_0)^k.$$

Da die Ableitungsfunktion von f ebenfalls eine Potenzreihe ist, ist auch f' differenzierbar. Die Aussage bezüglich der k-ten Ableitung lässt sich durch vollständige Induktion beweisen. □

1.9. **Korollar.** *Jede Potenzreihe ist die Taylor-Reihe ihrer Summenfunktion.*

Beweis. Nach dem vorherigen Satz gilt

$$f^{(k)}(x_0) = k(k-1) \ldots 1 a_k,$$

also

$$a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!},$$

sowie $f(x_0) = a_0$. □

Diese Behauptungen bieten die Möglichkeit, die Operation der Differentiation umzukehren.

[1] Sogar die Lipschitz-Stetigkeit auf dem Intervall $(x_1 - \rho, x_1 + \rho)$.

1.10. **Definition.** Sei f eine reellwertige Funktion einer reellen Variablen, und $D(f) = I$ ein Intervall. Wir sagen, dass die Funktion $F : I \to \mathbb{R}$ eine *Stammfunktion* der Funktion f ist, wenn F differenzierbar ist und $F'(x) = f(x)$ für alle $x \in I$ gilt.

1.11. **Satz.** *Sei $\sum(a_n(x-x_0)^n)$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius. Dann besitzt die Summenfunktion der Potenzreihe eine Stammfunktion, z. B.*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1} + c, \qquad c \in \mathbb{R}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt sofort aus dem Satz über die Differentiation der Summenfunktion von Potenzreihen. □

Es ist wichtig, dass die Koeffizienten durch die Summenfunktion der Potenzreihe eindeutig bestimmt sind.

1.12. **Satz.** *Seien*

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n$$

Potenzreihen, die ein gemeinsames Konvergenzintervall (x_0-r, x_0+r) haben. Sei ferner $x_n \in (x_0-r, x_0+r)$ eine Folge, zu der ein $y \in (x_0-r, x_0+r)$ existiert, sodass $x_n \neq y$, $x_n \to y$ und für die $f(x_n) = g(x_n)$ gilt.

Dann ist $a_n = b_n$ für jeden Index $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Nach dem Transformationssatz genügt es, den Fall $y = x_0$ zu untersuchen. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion. Da die Summenfunktion der Potenzreihe stetig ist, gilt

$$a_0 = f(x_0) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x_0) = b_0.$$

Nehmen wir an, dass für eine Zahl $n \in \mathbb{N}$ gilt: $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, …, $a_n = b_n$. Dann ist die Konvergenzmenge der Potenzreihen

$$f_1(x) := a_{n+1} + a_{n+2}(x-x_0) + a_{n+3}(x-x_0)^2 + \dots$$
$$g_1(x) := b_{n+1} + b_{n+2}(x-x_0) + b_{n+3}(x-x_0)^2 + \dots$$

dasselbe Intervall K, und für alle $x \neq x_0$ gilt

$$f_1(x) = \frac{f(x) - \sum_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}} \text{ und } g_1(x) = \frac{g(x) - \sum_{k=0}^{n} b_k(x-x_0)^k}{(x-x_0)^{n+1}}.$$

Nach den Voraussetzungen ist $f_1(x_i) = g_1(x_i)$ für alle $i \in \mathbb{N}$. Da f_1 und g_1 ebenfalls Summenfunktionen von Potenzreihen sind, sind sie stetig. Daraus erhalten wir jedoch mit dem Gedankengang für den Fall $n = 0$, dass

$$a_{n+1} = f_1(x_0) = \lim_{n\to\infty} f_1(x_n) = \lim_{n\to\infty} g_1(x_n) = g_1(x_0) = b_{n+1}.$$

□

1.13. **Definition.** Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $D(f) = I$ ein offenes Intervall. Wir sagen, dass die Funktion f *analytisch* ist, wenn ein $x_0 \in I$ und eine Folge $(a_n) \subset \mathbb{R}$ existieren, sodass $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ für alle $x \in I$ gilt.

Wir sagen, dass die Funktion f *lokal analytisch* ist, wenn zu jedem Punkt $x \in I$ eine Umgebung existiert, auf die eingeschränkt f analytisch ist.

Wir merken an, dass die Bücher bezüglich der Terminologie nicht einheitlich sind; manche bezeichnen auch das als analytisch, was wir lokal analytisch nennen. Somit sind die Exponential- und Sinusfunktion Beispiele für analytische Funktionen, die Logarithmusfunktion ist eine lokal analytische, aber nicht analytische Funktion, und $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}}$, $f(0) = 0$ ein Beispiel für eine unendlich oft differenzierbare, aber im Punkt 0 nicht (lokal) analytische Funktion (siehe Übung oder Urbán: Grenzwertrechnung).

Mit dieser neuen Terminologie besagt also der vorherige Satz, dass zwei verschiedene, auf demselben Intervall definierte lokal analytische Funktionen höchstens an abzählbar vielen Stellen denselben Funktionswert annehmen können, und diese Punkte sich nicht im Inneren des Intervalls häufen können.

Beispiele für analytische Funktionen, die unendlich oft denselben Funktionswert annehmen, sind die Sinus- und Kosinusfunktion.[2]

Wir schließen die Eigenschaften der Summenfunktion von Potenzreihen mit der Frage der Teilbarkeit von Potenzreihen ab. Da wir bereits multiplizieren können, müssen wir uns nur noch mit der Frage des Kehrwerts (Reziproken) beschäftigen.

1.14. **Satz.** *Sei $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$, $r > 0$, $a_0 \neq 0$. Dann existieren ein $\delta > 0$ und eine Folge $(c_n) \subset \mathbb{R}$, sodass*

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n$$

für alle $x \in (x_0-\delta, x_0+\delta)$ gilt.

Beweis. Der Einfachheit halber können wir annehmen, dass $x_0 = 0$ und $a_0 = 1$. Wegen der Stetigkeit der Summenfunktion der Reihe $\sum(|a_n| \cdot |x|^n)$ an der Stelle 0 existiert ein $\delta > 0$, sodass

$$|a_1| \cdot |x| + |a_2| \cdot |x^2| + \ldots < 1$$

für alle $|x| < \delta$ gilt.

Dann ist

$$\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1-(-a_1x-a_2x^2-\ldots)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-a_1x-a_2x^2-\ldots)^n.$$

Nach dem Satz über das Cauchy-Produkt (durch n-malige Anwendung) existieren Koeffizienten a_{nk}, sodass

$$(-a_1x-a_2x^2-\ldots)^n = \sum_{k=0}^{n} a_{nk}x^k.$$

Wir könnten diese Koeffizienten sogar berechnen, aber das ist überflüssig, da für den weiteren Verlauf des Beweises das Wissen um ihre Existenz ausreicht. Also

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x^k\right)$$

falls $|x| < \delta$. Unter erneuter Anwendung des Satzes über die Umordnung absolut konvergenter Reihen, den wir bereits beim Transformationssatz verwendet haben, erhalten wir

$$\frac{1}{f(x)} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_{nk}\right)x^k = \sum_{k=0}^{\infty} c_kx^k$$

falls $|x| < \delta$. □

Zusammenfassend bilden also die Potenzreihen um den Entwicklungspunkt x_0 mit positivem Konvergenzradius einen kommutativen Ring, in dem die invertierbaren Elemente jene Potenzreihen sind, für deren ersten Koeffizienten $a_0 \neq 0$ gilt. Es sei angemerkt, dass diese Potenzreihen auch eine kommutative Algebra bilden.

1.15. *Bemerkung.* Wir zeigen ein Verfahren, wie man die Koeffizienten des Quotienten zweier Potenzreihen berechnen kann. Das Verfahren ist im Wesentlichen identisch mit dem, was wir bei der Polynomdivision gelernt haben.

Sei

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n, \qquad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_nx^n, \quad r > 0,\ g(0) = b_0 \neq 0.$$

---

[2]Es ist wichtig anzumerken, dass sich die Stellen der gemeinsamen Funktionswerte hier tatsächlich nicht häufen, sondern nur im Unendlichen.

Da für hinreichend kleines x gilt

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n}{\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

ist

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} (b_0 c_n + b_1 c_{n-1} + \ldots + b_n c_0) x^n.$$

Also

$$\begin{aligned} a_0 &= b_0 c_0 \\ a_1 &= b_0 c_1 + b_1 c_0 \\ a_2 &= b_0 c_2 + b_1 c_1 + b_2 c_0 \\ &\ldots \end{aligned}$$

Aus diesen unendlich vielen Gleichungen können wir je nach Bedarf und Zeit beliebig viele Koeffizienten c_k bestimmen, z. B.

$$\begin{aligned} c_0 &= \frac{a_0}{b_0} \\ c_1 &= \frac{a_0 - \frac{a_0 b_1}{b_0}}{b_0} \\ &\ldots \end{aligned}$$

Wenn wir dieses Verfahren ein wenig länger fortsetzen, erhalten wir beispielsweise

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - + \ldots}{1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - + \ldots} = c_1 x + c_3 x^3 + c_5 x^5 + \ldots,$$

wobei

$$c_1 = 1, \qquad c_3 = \frac{1}{3}, \qquad c_5 = \frac{2}{15}.$$

Schließlich beenden wir unsere Untersuchungen mit der (teilweisen) Klärung der Frage, was die erhaltene Reihensumme mit der im Inneren des Intervalls definierten Summenfunktion der Potenzreihe zu tun hat, falls eine Potenzreihe auch in einem der Randpunkte des Konvergenzintervalls konvergiert. Der folgende Satz zeigt, dass die Summenfunktion in diesem Fall stetig auf den Randpunkt fortgesetzt werden kann.

Der Einfachheit halber formulieren wir den Satz für den rechten Randpunkt des Konvergenzintervalls einer Potenzreihe um den Nullpunkt, aber dies ist für den Beweis ohne Bedeutung; der Fall des linken Randpunktes oder eines von null verschiedenen Entwicklungspunktes kann analog behandelt werden.

1.16. **Satz** (Abel)**.** *Sei $\sum(a_n x^n)$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius, $0 < r < \infty$, und sei*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n < \infty,$$

das heißt konvergent. Dann lässt sich die Summenfunktion

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

stetig auf den Punkt $x = r$ fortsetzen, das heißt

$$\lim_{x \to r-} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n.$$

Beweis. Zur weiteren Vereinfachung nehmen wir an, dass $r = 1$ ist. Dies ändert nichts am Ablauf des Beweises, sondern vereinfacht nur unsere Bezeichnungen und macht sie übersichtlicher.

Sei
$$s := \sum_{n=0}^{\infty} a_n, \qquad s_n := \sum_{k=0}^{n} a_k$$
Dann gilt nach dem, was wir beim Cauchy-Produkt aufgeschrieben haben, für $|x| < 1$, dass
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n,$$
somit
$$s - f(x) = s - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = \left((1-x)\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) s - (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} s_n x^n = (1-x)\sum_{n=0}^{\infty}(s-s_n)x^n.$$
Also
$$|s - f(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} |s-s_n| x^n.$$
Da $s_n \to s$, existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein Schwellenwertindex $N \in \mathbb{N}$, sodass für alle natürlichen Zahlen $n \geq N$ gilt: $|s - s_n| < \frac{\varepsilon}{2}$. Somit ist
$$|s - f(x)| \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s-s_n| x^n + \frac{\varepsilon}{2}(1-x)\sum_{n=N+1}^{\infty} x^n \leq (1-x)\sum_{n=0}^{N} |s-s_n| + \frac{\varepsilon}{2},$$
da $|x| < 1$. Da die lineare Funktion stetig ist, existiert zu $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für $x \in (1-\delta, 1)$ gilt:
$$(1-x)\sum_{n=0}^{N} |s-s_n| < \frac{\varepsilon}{2},$$
das heißt, wenn $x \in (1-\delta, 1)$, dann
$$|s - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$
was genau die zu beweisende Behauptung ist. □

1.17. *Bemerkung.* Niels Henrik Abel [1802-1829] war ein norwegischer Mathematiker. Er war einer der einflussreichsten Geister des 19. Jahrhunderts. Er leistete Bedeutendes bei der Grundlegung der Algebra und in der Funktionentheorie.

1.18. *Beispiel.* Betrachten wir die Potenzreihe
$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^n}{n}.$$
Wir haben gesehen, dass diese auf dem offenen Intervall $(-1, 1)$ die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$ darstellt. Diese Funktion ist in jedem Punkt ihres Definitionsbereichs stetig, wie wir bereits früher gesehen haben. Die obige Potenzreihe konvergiert an der Stelle $x = 1$, da sie vom Leibniz-Typ ist. Nach dem abelschen Grenzwertsatz lässt sich die Summenfunktion der Potenzreihe somit stetig auf den Punkt $x = 1$ fortsetzen, und der Funktionswert dort ist die entsprechende Reihensumme, das heißt
$$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}.$$
Dies haben wir übrigens bereits im ersten Semester mit anderen Methoden eingesehen.

1.19. *Beispiel.* Ähnlich zum vorherigen Gedankengang erhalten wir aus der Darstellung
$$\operatorname{arctg}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$$
dass
$$\operatorname{arctg}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1},$$

also

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \dots$$

1.1. **Trigonometrische Funktionen.** Im Laufe unserer bisherigen Studien haben wir die grundlegenden Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen ausführlicher behandelt, die wir im Folgenden zusammenfassen können.

Auf der Grundlage einer geometrischen Formulierung haben wir die Sinus- und Kosinusfunktion auf intuitive Weise definiert und uns im Wesentlichen auf die folgenden Eigenschaften geeinigt.

- $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin ist eine ungerade, cos eine gerade Funktion,
- $\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$,
- $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Wir erwähnen einige der wichtigsten Folgerungen aus dem im letzten und in diesem Semester Gelernten.

- sin und cos sind beliebig oft differenzierbare Funktionen,
- es kann höchstens ein solches Funktionenpaar mit diesen Eigenschaften existieren,
- $$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$
- $$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Mit dieser Herangehensweise gibt es ein großes Problem. Obwohl die intuitive geometrische Einführung der trigonometrischen Funktionen äußerst anschaulich ist, sodass wir sie uns, wann immer wir von diesen Funktionen sprechen, mit ihrer geometrischen Bedeutung vorstellen, lässt dieser Aufbau logisch zu wünschen übrig. Denken wir nur daran, dass wir für die Definition Begriffe wie die Bogenlänge oder die Winkelgröße benötigen.

Es gibt also eigentlich kein Problem mit den Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen, das Problem ist ihre Definition, ihre Existenz. Nun möchten wir eine Möglichkeit aufzeigen, wie man diese logische Lücke schließen und die komplizierten geometrischen Begriffe vermeiden kann. Das Ziel ist nicht, eine neuartige Einführungsmöglichkeit für die trigonometrischen Funktionen zu zeigen, sondern wohlbekannte Begriffe im logischen Gebäude der Analysis an ihren richtigen Platz zu setzen. Dieser Gedankengang ist sehr charakteristisch für die gesamte heutige Mathematik.

Wir haben auf intuitive Weise die trigonometrischen Funktionen, ihre grundlegenden Eigenschaften und die wichtigsten Folgerungen aus diesen Eigenschaften, wie ihre Potenzreihendarstellung, kennengelernt. Diese Potenzreihen können jedoch auch ohne die Einführung komplizierter geometrischer Begriffe aufgeschrieben und ihre Eigenschaften untersucht werden. Dies kann die Idee liefern, den Gedankengang umzukehren und die Potenzreihendarstellung zur Definition der trigonometrischen Funktionen zu verwenden. Also **sei**

$$\sin x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

und sei

$$\cos x := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

Basierend auf dem, was wir über Potenzreihen gelernt haben, folgen sofort die folgenden Eigenschaften:

- $D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$,
- sin ist eine ungerade, cos eine gerade Funktion,
- sin und cos sind beliebig oft differenzierbare Funktionen,
- $\cos 0 = 1$,
- $\lim_{x \to 0+} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0+} \left(1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \dots\right) = 1$,

- $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

Die Additionstheoreme lassen sich beispielsweise mit Hilfe des Cauchy-Produkts oder durch Anwendung der Ableitungsregeln auf folgende Weise einsehen.

Sei bei einem festen, aber beliebigen $y \in \mathbb{R}$

$$f(x) = [\sin(x+y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y]^2 + [\cos(x+y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y]^2 .$$

Man kann nachrechnen, dass $f(0) = 0$ und $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, womit $f \equiv 0$ ist. Damit haben wir eingesehen, dass die durch Potenzreihen definierten Funktionen sin und cos alle wichtigen grundlegenden Eigenschaften erfüllen, die wir von den trigonometrischen Funktionen erwartet haben. Da wir bereits eingesehen haben, dass höchstens ein solches Funktionenpaar existieren kann, sind sie es.

Da wir keine logisch komplizierten, aber anschaulichen geometrischen Begriffe verwendet haben, sind die so definierten Funktionen natürlich auch nicht besonders anschaulich.

1.2. **Komplexe Potenzreihen.** Dieser Punkt scheint am geeignetsten zu sein, um aufzuzeigen, dass sehr vieles von dem, was wir bisher in der Analysis gelernt haben, auf den Bereich der komplexen Zahlen übertragen werden kann. Dazu müssen wir vieles im Zusammenhang mit den Grundbegriffen klären.

In der Algebra-Vorlesung kam alles Wesentliche über komplexe Zahlen vor, so auch der Betrag einer komplexen Zahl. Dies ermöglicht es uns, die Konvergenz einer Zahlenfolge analog zum reellen Fall zu definieren.

1.20. **Definition.** Sei $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$ eine Folge komplexer Zahlen und $z = a + bi \in \mathbb{C}$ eine komplexe Zahl. Wir sagen, dass die Folge (z_n) gegen die Zahl z konvergiert (oder dass der Grenzwert der Folge (z_n) die Zahl z ist), wenn zu jeder positiven Zahl $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für jede natürliche Zahl $n \geq N$ gilt: $|z_n - z| < \varepsilon$.

1.21. **Behauptung.** *Es gilt genau dann $z_n \to z$, wenn*

- *für die reelle Zahlenfolge $(|z_n - z|)$ gilt: $|z_n - z| \to 0$.*
- *für die reellen Zahlenfolgen (a_n) und (b_n) gilt: $a_n \to a$, $b_n \to b$.*

Beweis. Die erste Umformulierung ist trivial, und die zweite folgt daraus, dass

$$|z_n - z|^2 = |a_n - a|^2 + |b_n - b|^2.$$

□

Die große Bedeutung dieser Umformulierungen liegt darin, dass sie die Konvergenz komplexer Folgen durch die Konvergenz reeller Folgen ausdrücken, sodass die Aussagen darauf zurückgeführt werden können. Im Zusammenhang mit der Konvergenz von Folgen kann fast jeder Satz neu formuliert und wörtlich genauso bewiesen werden wie im reellen Fall. Sehen wir uns einige Beispiele an.

1.22. **Behauptung.** *Sei $z_n = a_n + b_n i \in \mathbb{C}$, $z = a + bi \in \mathbb{C}$, $w_n = c_n + d_n i \in \mathbb{C}$, $w = c + di \in \mathbb{C}$. Wenn $z_n \to z$ und $w_n \to w$, dann*

- $$(z_n \pm w_n) \to z \pm w,$$
- $$(z_n \cdot w_n) \to zw,$$
- *Wenn $w_n \neq 0$, $w \neq 0$, dann*
$$\left(\frac{z_n}{w_n}\right) \to \frac{z}{w},$$
- $$(|z_n|) \to |z|.$$

Beweis. Wir beweisen nur die Aussage über die Multiplikation, um den Gedankengang zu verdeutlichen. Dies jedoch auf zwei Arten.

Den reellen Fall imitierend, können wir schreiben, dass

$$|z_n w_n - zw| = |z_n(w_n - w) + (z_n - z)w| \leq |z_n| \cdot |w_n - w| + |z_n - z| \cdot |w| \to 0$$

gemäß den Voraussetzungen.

Wenden wir den anderen Gedankengang an, erhalten wir

$$z_n w_n = (a_n c_n - b_n d_n) + i(a_n d_n + b_n c_n) \to (ac - bd) + i(ad + bc) = zw,$$

da wir für reelle Zahlenfolgen die Rechenregeln bereits kennen. □

Es ist wichtig hervorzuheben, dass das einzige Problem bei der Anordnung und den damit verbundenen Sätzen auftritt. Den Körper der komplexen Zahlen können wir nämlich nicht „sinnvoll", das heißt unter Beibehaltung der Rechenregeln, anordnen. Somit hat es auch keinen Sinn, von Supremum oder Infimum zu sprechen. Dennoch bleibt der Satz von Bolzano-Weierstraß, den wir seinerzeit mit Hilfe von Anordnungsbegriffen bewiesen haben, gültig.

1.23. **Satz** (Bolzano-Weierstraß). *Sei $(z_n) \subset \mathbb{C}$ eine beschränkte Folge. Dann existiert eine Indexfolge n_k, sodass z_{n_k} konvergiert.*

Beweis. Sei $z_n = a_n + ib_n$. Die reelle Folge (a_n) ist beschränkt, somit existiert nach der bekannten Version des Satzes von Bolzano-Weierstraß eine Indexfolge $(n_l)_{l\in\mathbb{N}}$, sodass (a_{n_l}) konvergiert. Die reelle Zahlenfolge (b_{n_l}) ist ebenfalls beschränkt, womit wir durch wiederholte Anwendung des Satzes von Bolzano-Weierstraß erhalten, dass eine Indexfolge $(l_k)_{k\in\mathbb{N}}$ existiert, sodass die Folge $(b_{n_{l_k}})$ konvergiert. Da die Teilfolge einer Teilfolge wieder eine Teilfolge ist und jede Teilfolge einer konvergenten Folge ebenfalls konvergiert, erhalten wir, dass

$$z_{n_{l_k}} = a_{n_{l_k}} + ib_{n_{l_k}}$$

eine konvergente Teilfolge ist. □

Wir merken an, dass bezüglich unendlicher Reihen alles, was wir gelernt haben, gültig bleibt. Mit Hilfe der absoluten Konvergenz können auch hier viele Konvergenzsätze auf Reihen mit positiven Gliedern zurückgeführt werden.

Im Folgenden formulieren wir die wichtigsten mengentheoretischen Grundbegriffe. Der einzige Unterschied zum reellen Fall ist, dass die Rolle des symmetrischen Intervalls mit Radius ε von der offenen Kreisscheibe mit Radius ε übernommen wird.

1.24. **Definition.** Bezeichne

$$B(w, r) := \{z \in \mathbb{C} : |z - w| < r\}$$

die Umgebung des Punktes $w \in \mathbb{C}$ mit Radius $r > 0$. Dies ist eine offene Kreisscheibe in der komplexen Zahlenebene mit Mittelpunkt w und Radius r. Sei $D \subset \mathbb{C}$, $w \in \mathbb{C}$. Wir sagen, dass der Punkt w der Menge D

- ein innerer Punkt ist, wenn ein $r > 0$ existiert, sodass $B(w, r) \subset D$,
- ein äußerer Punkt ist, wenn ein $r > 0$ existiert, sodass $B(w, r) \subset \mathbb{C} \setminus D$,
- ein Randpunkt ist, wenn für alle $r > 0$ gilt: $B(w, r) \cap D \neq \emptyset$, $B(w, r) \cap (\mathbb{C} \setminus D) \neq \emptyset$.

Wir sagen, dass D offen ist, wenn jeder ihrer Punkte ein innerer Punkt ist, und D abgeschlossen ist, wenn ihr Komplement offen ist. Die Menge $D \subset \mathbb{C}$ ist kompakt, wenn zu jeder Folge $z_n \in D$ eine Indexfolge n_k und ein $z \in D$ existieren, sodass $z_{n_k} \to z$.

Aus der Definition ist sofort ersichtlich, dass eine abgeschlossene Menge all ihre Randpunkte enthält. Völlig analog zu dem im letzten Semester Bewiesenen lässt sich einsehen, dass eine Menge D genau dann abgeschlossen ist, wenn man aus ihr nicht herauskonvergieren kann, d.h. wenn aus $z_n \in D$ und $z_n \to z$ folgt, dass $z \in D$. Aus dem Satz von Bolzano-Weierstraß folgt direkt, dass auch in der komplexen Zahlenebene genau die beschränkten und abgeschlossenen Mengen die kompakten Mengen sind. Wie bisher bezeichnet $\operatorname{int} D$ die Menge der inneren Punkte der Menge D, und D' die Häufungspunkte der Menge D.

Um die Aussagen zu formulieren, führen wir eine neue Bezeichnung ein. Wie wir bisher gesehen haben und auch im Laufe unserer weiteren Studien sehen werden, ist es bei sehr vielen Sätzen für die Formulierung und den Beweis des Satzes unerheblich, ob wir im Körper der reellen oder der komplexen Zahlen arbeiten. In diesen Fällen werden wir der einheitlichen Schreibweise halber das Symbol $\mathbb{K}$ verwenden, was bedeutet, dass nach Belieben sowohl $\mathbb{R}$ als auch $\mathbb{C}$ dafür geschrieben werden kann.

1.25. **Definition.** Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{K}$, d.h. $D(f) \subset \mathbb{C}$, $R(f) \subset \mathbb{R}$ oder $R(f) \subset \mathbb{C}$.

- Wir sagen, dass f im Punkt $z_0 \in D(f)$ stetig ist, wenn für jede Folge $z_n \in D(f)$ mit $z_n \to z_0$ gilt, dass $f(z_n) \to f(z_0)$.
- Wir sagen, dass der Grenzwert von f im Punkt $z_0 \in D(f)'$ die Zahl w ist, wenn für jede Folge $z_n \in D(f)$ mit $z_n \to z_0$ gilt, dass $f(z_n) \to w$.
- Wir sagen, dass f im Punkt $z_0 \in \operatorname{int} D$ differenzierbar ist, falls existiert:

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}.$$

Natürlich können Stetigkeit und Grenzwert auch äquivalent in der ε-δ-Sprache umformuliert werden. Die gewohnten Rechenregeln für Stetigkeit, Grenzwert und Differentialquotient bleiben aufgrund der Eigenschaften für Folgengrenzwerte gültig.

Dies ist der Punkt, an dem wir erwähnen müssen, dass im Zusammenhang mit Potenzreihen jeder Satz, den wir gelernt haben, gültig bleibt. Sei $a_n \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}$ und

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

- Sei

$$r := \frac{1}{\limsup \sqrt[n]{|a_n|}} \qquad \left(\frac{1}{+0} = +\infty, \ \frac{1}{+\infty} = 0 \right).$$

  Wenn $|z - z_0| < r$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ absolut konvergent, wenn $|z - z_0| > r$, dann ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ divergent.
- Wenn $D(f) = B(z_0, r)$, dann ist f stetig und beliebig oft differenzierbar, und ihre Ableitungen können auf die gelernte Weise berechnet werden.
- Der abelsche Grenzwertsatz gilt ebenfalls, das heißt, wenn $|z_1 - z_0| = r$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$ konvergiert, dann lässt sich f stetig auf den Punkt z_1 fortsetzen und es gilt $f(z_1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z_1 - z_0)^n$.

Die einzige technische Schwierigkeit besteht darin, dass der Rand der Umgebung mit Radius r um den Punkt z_0 nicht mehr nur aus zwei Punkten besteht. Hier muss erwähnt werden, dass Potenzreihen die Möglichkeit bieten, die Definition einiger wohlbekannter Funktionen auf den Bereich der komplexen Zahlen zu erweitern. Wir beginnen mit dem einfachsten Beispiel. Es ist klar, dass für $|z| < 1$ gilt:

$$\frac{1}{1 - z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n.$$

In Analogie dazu können wir sagen, **sei**

$$\exp z = e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!},$$

$$\sin z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\cos z := \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Dies ist natürlich ohne besonderen anschaulichen Gehalt die Fortführung der Philosophie, dass wir die trigonometrischen (und die Exponential-) Funktionen über ihre Potenzreihen definieren können.

Sehen wir uns einige Folgerungen aus der Einführung dieser Definitionen an.

- sin, cos und exp sind überall definierte, beliebig oft differenzierbare Funktionen, für die gilt: $\exp' = \exp$, $\sin' = \cos$, $\cos' = -\sin$.

- Die Additionstheoreme bleiben gültig (siehe die Beweise mit dem Cauchy-Produkt im Material von Katalin Károlyi), d.h.
$$\begin{aligned} e^{z+w} &= e^z e^w \\ \sin(z+w) &= \sin z \cos w + \cos z \sin w \\ \cos(z+w) &= \cos z \cos w - \sin z \sin w. \end{aligned}$$
- $$e^{iz} = \cos z + i \sin z \qquad z \in \mathbb{C},$$
und speziell $e^{i\pi} = -1$.
- exp wird zu einer periodischen Funktion mit der (komplexen!) Periode $2\pi i$, da
$$e^{z+2\pi i} = e^z e^{2\pi i} = e^z.$$

Wenn $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, dann können wir von den im letzten Semester gelernten Begriffen und Sätzen nur sehr wenige verwenden, da es keine Anordnung gibt, und wir somit weder von Monotonie noch von Extremwerten oder Mittelwertsätzen sprechen können. Wenn jedoch $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, dann können wir zwar ebenfalls nicht von Monotonie sprechen, aber zumindest von Extremwerten.

1.26. **Satz** (Weierstraß). *Sei $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ und $D(f)$ kompakt. Dann nimmt f sein Minimum und Maximum an.*

Der Beweis stimmt Wort für Wort mit dem im Skript des letzten Semesters überein. Wir schließen unsere Ausführungen über Funktionen einer komplexen Variablen mit einem Ausflug in das Gebiet der Algebra ab.

1.27. **Satz** (Fundamentalsatz der Algebra). *Jedes komplexe Polynom von mindestens erstem Grad besitzt eine Nullstelle.*

Beweis. Sei
$$p(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n, \qquad a_k \in \mathbb{C},\ a_n \neq 0.$$
Da $p : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine Funktion ist, untersuchen wir stattdessen die Funktion $|p| : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$, von deren Extremwerten wir sprechen können. Bezeichne
$$\mu := \inf_{z \in \mathbb{C}} |p(z)| \geq 0.$$
Da
$$\lim_{|z| \to \infty} |p(z)| = \infty,$$
(warum?), existiert ein $r > 0$, sodass $|p(z)| > \mu$ wenn $|z| > r$. Also
$$\mu = \inf_{|z| \leq r} |p(z)| \geq 0.$$
Da
$$K := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$$
als beschränkte und abgeschlossene Menge eine kompakte Menge ist, existiert ein $z_0 \in K$, sodass $\mu = p(z_0)$. Wir müssen zeigen, dass $\mu = 0$.

Nehmen wir indirekt an, dass $\mu > 0$ ist, und sei
$$q(z) := \frac{p(z+z_0)}{p(z_0)}.$$
Gemäß den Bedingungen ist $q(0) = 1$, q ein Polynom n-ten Grades und $|q(z)| \geq 1$. Durch die Einführung des Polynoms q haben wir also die Zahl $\mu > 0$ in 1 umgewandelt. Demnach können wir schreiben, dass das Polynom q die Form
$$q(z) = 1 + b_m z^m + \ldots b_n z^n$$
hat, wobei $b_m \neq 0$ der erste Koeffizient mit dieser Eigenschaft ist. Ein solcher existiert, da $b_n \neq 0$, also $1 \leq m \leq n$.

Wir zeigen, dass eine Zahl z existiert, für die $|q(z)| < 1$ gilt, was ein Widerspruch ist. Diese Zahl z suchen wir in ihrer trigonometrischen Form, d.h. in der Form $z = \rho e^{i\psi}$. Da $\left|\frac{-|b_m|}{b_m}\right| = 1$, existiert ein $\varphi \in \mathbb{R}$, sodass

$$\frac{-|b_m|}{b_m} = \cos\varphi + i \sin\varphi = e^{i\varphi}.$$

Bezeichne ferner

$$\psi := \frac{\varphi}{m},$$

dann ist

$$b_m e^{im\psi} = -|b_m|.$$

Sei

$$z := \rho e^{i\psi} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad (\rho > 0).$$

Unser Ziel ist es nun, die Zahl ρ geschickt so zu wählen, dass wir auf einen Widerspruch stoßen.

Dann ist

$$b_m z^m = \rho^m b_m e^{im\psi} = -\rho^m |b_m|.$$

Daher gilt

$$|q(z)| = \left|q\left(\rho e^{i\psi}\right)\right| \leq |1 - |b_m|\rho^m| + |b_{m+1}|\rho^{m+1} + \ldots + |b_n|\rho^n,$$

wobei wir mit Ausnahme der ersten beiden Glieder die Dreiecksungleichung angewendet haben. Wenn $0 < \rho^m < \frac{1}{|b_m|}$, dann ist $1 - |b_m|\rho^m > 0$, sodass wir den ersten Betrag weglassen können. Also gilt in diesem Fall

$$\left|q\left(\rho e^{i\psi}\right)\right| \leq 1 - |b_m|\rho^m + |b_{m+1}|\rho^{m+1} + \ldots + |b_n|\rho^n = 1 - \rho^m\left(|b_m| - |b_{m+1}|\rho - \ldots - |b_n|\rho^{n-m}\right).$$

Da $|b_m| > 0$ und Polynomfunktionen stetig sind, steht bei einem „ausreichend kleinen“ ρ in der Klammer eine positive Zahl. Für ein solches ρ gilt folglich

$$\left|q\left(\rho e^{i\psi}\right)\right| < 1,$$

was ein Widerspruch ist. □

2. Funktionenfolgen, Funktionenreihen

Im Zusammenhang mit Potenzreihen taucht eine allgemeinere Aufgabe auf, wofür wir den Begriff der Folge und des Grenzwerts verallgemeinern müssen.

2.1. **Definition.** Sei $D(f_n) = I$ ein Intervall, $f_n : I \to \mathbb{K}$ $(n \in \mathbb{N})$. Der *Konvergenzbereich* der Funktionenfolge (f_n) ist

$$K := \left\{x \in I \, : \, \exists \lim_{n\to\infty} f_n(x)\right\},$$

ihre *Grenzfunktion* ist die Funktion

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad D(f) := K$$

.[3] Analog ist die durch die Formel $s_n(x) := \sum_{k=0}^{n} f_k(x)$ definierte Funktion die n-te Partialsumme der Funktionenreihe $\sum(f_n)$, und die *Summenfunktion* der Funktionenreihe ist

$$f(x) := \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$$

dort, wo sie definiert ist.

2.2. *Beispiel.* (1)

$$\text{Für } D(f_n) = \mathbb{R},\ f_n(x) = x^n \text{ ist } K = (-1, 1],\ f(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1), \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

[3] Beachten wir, dass wir hier von der zuvor bei Potenzreihen verwendeten Bezeichnung abweichen, bei der wir uns nur auf das Innere der Menge K beschränkt haben.

(2)
$$\text{Für } D(g_n) = \mathbb{R},\ g_n(x) = \sum_{k=0}^{n} x^k \text{ ist } K = (-1,1),\ g(x) = \frac{1}{1-x}$$
(3)
$$\text{Für } D(h_n) = \mathbb{R},\ h_n(x) = (1-x^2)^n \text{ ist } K = (-1,1),\ h(x) = \begin{cases} 0, & x \in (-1,1), x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$
(4)
$$\text{Für } D(j_n) = \mathbb{R},\ j_n(x) = \frac{1}{n}\sin nx \text{ ist } K = \mathbb{R},\ j(x) = 0$$
(5) Sei $D(k_n) = [0,1]$, $k_n(0) = k_n(\frac{2}{n}) = k_n(1) = 0$, $k_n(\frac{1}{n}) = n$ und sei k_n linear auf den Intervallen $[0, \frac{1}{n}]$, $[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}]$ und $[\frac{2}{n}, 1]$. Dann ist $K = [0,1]$ und $k(x) = 0$.
(6) Sei $D(l_n) = [0,1]$ und bezeichne (q_n) eine Aufzählung der rationalen Zahlen, die in das Intervall $[0,1]$ fallen. Sei
$$l_n(x) = \begin{cases} 1, & x \in \{q_1, q_2, \cdots, q_n\}, \\ 0, & x \in [0,1],\ x \neq q_1, q_2, \cdots, q_n. \end{cases}$$
Dann ist $K = [0,1]$ und $l(\cdot)$ die Dirichlet-Funktion, also
$$l(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0, & x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Bei Potenzreihen haben wir gesehen, dass man sie gliedweise differenzieren und integrieren konnte, d.h. die Operationen des Ableitens und der Grenzwertbildung, sowie des Integrierens und der Grenzwertbildung waren vertauschbar. Leider zeigen die vorherigen Beispiele gut, dass wir, wenn es sich nicht um Potenzreihen, sondern um allgemeinere Funktionenfolgen und Funktionenreihen handelt, auf so etwas nicht hoffen können. Das erste und das dritte Beispiel zeigen, dass die Stetigkeit und damit die Differenzierbarkeit nicht unbedingt erhalten bleibt. Beim vierten Beispiel sehen wir, dass, obwohl die Grenzfunktion differenzierbar ist, die Folge der Ableitungen nicht gegen die Ableitung der Grenzfunktion konvergiert. Beim fünften Beispiel sehen wir, dass die Folge der Riemann-Integrale,[4] die konstante Folge 1, nicht gegen das Integral der Grenzfunktion konvergiert. Schließlich sehen wir beim letzten Beispiel, dass Riemann-integrierbare Funktionen gegen eine nicht Riemann-integrierbare Funktion konvergieren. Letzteres folgt zum Beispiel auch aus dem Lebesgue-Kriterium, da l_n nur an endlich vielen Stellen unstetig ist und eine endliche Menge das Maß null hat.

Damit wir also von allgemeinen Funktionenfolgen Ähnliches erwarten können wie das, was wir bei Potenzreihen gesehen haben, muss der Konvergenzbegriff verschärft werden. Eine mögliche und weit verbreitete Verschärfung ist die folgende.

2.3. **Definition.** Sei $D(f_n) = D(f) = H \subset \mathbb{R}$. Wir sagen, dass die Funktionenfolge (f_n) *gleichmäßig* gegen die Funktion f *konvergiert*, in Symbolen: $f_n \rightrightarrows f$, wenn zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein Schwellenwertindex $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n \geq N$ und $x \in H$ gilt:
$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Analog lässt sich die gleichmäßige Konvergenz einer Funktionenreihe definieren. Wenn wir im Folgenden betonen wollen, dass die Konvergenz einer Funktionenfolge nicht notwendigerweise gleichmäßig ist, schreiben wir punktweise Konvergenz.

Der wesentlichste Unterschied zwischen den Definitionen der punktweisen und der gleichmäßigen Konvergenz besteht darin, ob der zur Zahl $\varepsilon > 0$ gefundene Schwellenwertindex N bei der Zahlenfolge $(f_n(x))$ von der Stelle x abhängt oder nicht.

Es lässt sich leicht überlegen, dass die gleichmäßige Konvergenz stärker ist als die punktweise Konvergenz.

---

[4] Der Vollständigkeit halber sind auch Bemerkungen und Behauptungen im Zusammenhang mit der Integration enthalten. Falls der Leser mit dem Begriff des Integrals noch nicht vertraut ist, kann er diese Abschnitte einfach überspringen.

2.4. **Behauptung.** *Wenn (f_n) gleichmäßig gegen f konvergiert, dann auch punktweise.*

Es ist ebenfalls nicht schwer, das Cauchy-Konvergenzkriterium für die gleichmäßige Konvergenz zu formulieren.

2.5. **Behauptung** (Cauchy-Kriterium). *Die Funktionenfolge (f_n) ist genau dann auf der Menge H gleichmäßig konvergent, wenn für jedes $\varepsilon > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert, sodass für alle $n, m \geq N$ gilt:*

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Beweis. Wenn $(f_n) \rightrightarrows f$, dann sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wir wählen den Schwellenwertindex N so, dass für alle $n \geq N$ und $x \in H$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Durch Anwendung der Dreiecksungleichung erhalten wir, dass, wenn $n, m > N$, dann

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| < \varepsilon.$$

Umgekehrt, wenn das Cauchy-Kriterium erfüllt ist, dann ist bei festem x die Folge $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge, womit eine Funktion $f : H \to \mathbb{K}$ existiert, sodass (f_n) punktweise gegen die Funktion f konvergiert. Zu einer festen Zahl $\varepsilon > 0$ wählen wir den Schwellenwertindex $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \geq N$ und für alle $x \in H$ gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Wenn in dieser Ungleichung $m \to \infty$ geht, sehen wir, dass für alle $n \geq N$ und für alle $x \in H$ gilt:

$$|f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

□

Bei Funktionenreihen kann die gleichmäßige Konvergenz oft mit Hilfe der folgenden hinreichenden Bedingung nachgewiesen werden.

2.6. **Behauptung** (Weierstraß-Kriterium). *Sei $D(f_n) = H \subset \mathbb{R}$ und nehmen wir an, dass Zahlen (M_i) existieren, sodass für alle $x \in H$ gilt:*

$$|f_i(x)| \leq M_i.$$

Wenn

$$\sum_{i=0}^{\infty} M_i < \infty,$$

dann ist die Funktionenreihe $\sum(f_n)$ gleichmäßig konvergent.

Beweis. Die Behauptung folgt aus dem Cauchy-Kriterium. Sei

$$s_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f_i(x).$$

Für beliebige $x \in H$ und $m > n$ gilt:

$$|s_n(x) - s_m(x)| = \left| \sum_{i=n+1}^{m} f_i(x) \right| \leq \sum_{i=n+1}^{m} |f_i(x)| \leq \sum_{i=n+1}^{m} M_i.$$

Hieraus lässt sich der Beweis unter Verwendung des Cauchy-Kriteriums für numerische Reihen abschließen. □

2.7. *Beispiel.*

- Sei $\sum(a_n(x - x_0)^n)$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius $r > 0$. Wenn $0 < R < r$, dann ist die Potenzreihe auf dem Intervall $[x_0 - R, x_0 + R]$ gleichmäßig konvergent, da

$$|a_n(x - x_0)^n| \leq |a_n R^n|$$

für jeden Punkt $x \in [x_0 - R, x_0 + R]$ gilt, und nach Voraussetzung
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$$
konvergiert.

- Die Funktionenreihe
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin nx}{n^2}$$
ist gleichmäßig konvergent auf $\mathbb{R}$, da $\left|\frac{\sin nx}{n^2}\right| \le \frac{1}{n^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

Wir können uns nun der Untersuchung zuwenden, welchen Vorteil wir aus der Einführung des Begriffs der gleichmäßigen Konvergenz ziehen.

2.8. **Satz.** *Sei $D(f_n) = D(f) = H$, $f_n \rightrightarrows f$, und sei $a \in H'$, ferner existiere*
$$\lim_{x\to a} f_n(x) := b_n$$
für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$. Dann ist die Folge b_n konvergent, und unter Verwendung der Bezeichnung $b := \lim(b_n)$ gilt:
$$\lim_{x\to a} f(x) = b.$$

Anders ausgedrückt besagt der Satz, dass bei gleichmäßiger Konvergenz die beiden Grenzwertbildungen vertauschbar sind, das heißt:
$$\lim_{n\to\infty} \lim_{x\to a} f_n(x) = \lim_{x\to a} \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig und wir wählen dazu einen Schwellenwertindex $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $n, m \ge N$ und für alle $x \in H$ gilt:
$$|f_n(x) - f_m(x)| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{1}$$
Daraus erhalten wir mit dem Grenzübergang $x \to a$, dass
$$|b_n - b_m| \le \frac{\varepsilon}{3} < \varepsilon, \tag{2}$$
das heißt, dass die Folge (b_n) eine Cauchy-Folge ist. Sei $b := \lim(b_n)$. Aus der Beziehung (2) erhalten wir mit dem Grenzübergang $m \to \infty$ ferner, dass
$$|b_N - b| \le \frac{\varepsilon}{3}.$$

Unter Ausnutzung der Bedingung, dass $\lim_{x\to a} f_N(x) = b_N$, erhalten wir, dass zu $\frac{\varepsilon}{3}$ ein $\delta > 0$ existiert, sodass für jedes $x \in B(a, \delta) \cap H$ gilt:
$$|f_N(x) - b_N| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$
Schließlich erhalten wir aus der Beziehung (1) mit dem Grenzübergang $m \to \infty$, dass
$$|f_N(x) - f(x)| \le \frac{\varepsilon}{3} \tag{4}$$
für jedes $x \in H$ gilt.

Zusammenfassend haben wir auf der Grundlage der Beziehungen (2), (3) und (4) zur Zahl $\varepsilon > 0$ eine Zahl $\delta > 0$ gefunden, sodass für jedes $x \in B(a, \delta) \cap H$ gilt:
$$|f(x) - b| \le |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - b_N| + |b_N - b| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$
□

Wir können die Folgerung für die Stetigkeit formulieren.

2.9. **Korollar.** *Sei $D(f_n) = D(f) = H$ und $a \in \operatorname{int} H$. Wenn f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ im Punkt a stetig ist, dann ist auch f im Punkt a stetig.*

Die gleichmäßige Konvergenz bewährt sich auch bei der Untersuchung von Integralen.

2.10. **Satz.** *Sei $D(f_n) = D(f) = [a,b]$ ein Intervall und nehmen wir an, dass $f_n \in R[a,b]$. Wenn $f_n \rightarrowtail f$, dann ist $f \in R[a,b]$ und*

$$\int_a^b f_n \to \int_a^b f.$$

Beweis. Zu einer gegebenen Zahl $\varepsilon > 0$ sei $N \in \mathbb{N}$ ein Schwellenwertindex, für den bei beliebigen $n, m \geq N$ und für alle $x \in [a,b]$ gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon. \tag{5}$$

Dann gilt mit der Bezeichnung

$$I_n := \int_a^b f_n(x)dx$$

dass

$$|I_n - I_m| = \left| \int_a^b (f_n(x) - f_m(x))dx \right| \leq \varepsilon(b-a).$$

Daraus ist ersichtlich, dass die Folge (I_n) eine Cauchy-Folge ist; bezeichne $I := \lim(I_n)$. Durch den Grenzübergang $m \to \infty$ erhalten wir, dass

$$|I_N - I| \leq \varepsilon(b-a). \tag{6}$$

Da f_N auf dem Intervall $[a,b]$ integrierbar ist, existiert zu jeder Zahl $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodass für jede Zerlegung Z, für die $|Z| < \delta$, und für jeden zugehörigen Stützstellenvektor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^n f_N(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I_N \right| < \varepsilon.$$

Andererseits erhalten wir aus der Beziehung (5) der gleichmäßigen Konvergenz durch den Grenzübergang $m \to \infty$, dass

$$|f_N(x) - f(x)| < \varepsilon$$

für alle Zahlen $x \in [a,b]$ gilt. Daraus folgt, dass für jede Zerlegung Z, die feiner als δ ist, gilt:

$$\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f_N(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \leq \sum_{i=1}^n |f(\xi_i) - f_N(\xi_i)|(x_i - x_{i-1}) \leq \varepsilon(b-a).$$

Schließlich müssen wir nur noch summieren, was wir erhalten haben. Für jede Zerlegung Z, für die $|Z| < \delta$, und für jeden beliebigen zugehörigen Stützstellenvektor $\boldsymbol{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ gilt:

$$\begin{aligned}\left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I \right| &\leq \left| \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - \sum_{i=1}^n f_N(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) \right| \\ &\quad + \left| \sum_{i=1}^n f_N(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) - I_N \right| + |I_N - I| < \varepsilon(b-a) + \varepsilon + \varepsilon(b-a),\end{aligned}$$

was durch geeignete Wahl von δ beliebig klein gemacht werden kann. Also ist f auf dem Intervall $[a,b]$ Riemann-integrierbar und ihr Integral ist gleich I. □

Wir haben bei den vorherigen Sätzen gesehen, dass sich die gleichmäßige Konvergenz hinsichtlich der Stetigkeit und der Riemann-Integrierbarkeit ideal verhält. Im Hinblick auf die Differenzierbarkeit sollte uns jedoch das vierte Beispiel aus der Einleitung zur Vorsicht mahnen: j_n konvergiert gleichmäßig gegen die Identisch-Null-Funktion, seine Ableitungsfunktionen konvergieren jedoch nicht. Wir können also nicht Ähnliches über die Differenzierbarkeit sagen wie über die Stetigkeit und die Riemann-Integrierbarkeit. Das Beispiel der Potenzreihen zeigt jedoch, dass die Situation nicht völlig hoffnungslos ist.

2.11. **Satz.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein offenes Intervall, f_n auf I differenzierbar, $a \in I$, die Zahlenfolge $(f_n(a))$ sei konvergent, und wir nehmen an, dass die Folge der Ableitungen (f_n') auf I gleichmäßig gegen eine Funktion g konvergiert. Dann gilt:*

(a) (f_n) konvergiert auf I punktweise gegen eine Funktion f.

(b) Wenn I endlich ist, dann ist die Konvergenz von (f_n) gleichmäßig.

(c) f ist differenzierbar und $f' = g$.

Beweis. Zu einer beliebigen Zahl $\eta > 0$ wählen wir den Index $N \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $m, n \geq N$ an jeder Stelle $x \in I$ gilt:

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \eta$$

und

$$|f_n(a) - f_m(a)| < \eta.$$

Wenden wir dann den Mittelwertsatz von Lagrange auf die Funktion $h = f_n - f_m$ an, erhalten wir:

$$\begin{aligned}|f_n(x) - f_m(x)| &\leq |(f_n(x) - f_m(x)) - (f_n(a) - f_m(a))| + |f_n(a) - f_m(a)| \\ &= |f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \cdot |x - a| + |f_n(a) - f_m(a)| < \eta(|x - a| + 1).\end{aligned}$$

Daraus ist ersichtlich, dass zu einer beliebigen Zahl $\varepsilon > 0$, wenn $\eta < \frac{\varepsilon}{|x-a|+1}$, mit dem wie zuvor zu η gewählten Schwellenwertindex für alle $n, m > N$ gilt:

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon, \tag{7}$$

also ist die Folge $(f_n(x))$ eine Cauchy-Folge für alle $x \in I$. Bezeichne ihre Grenzfunktion f. Der Schwellenwertindex N kann im Allgemeinen von der Stelle x abhängen, da das η von x abhing. Somit ist die Konvergenz nicht notwendigerweise gleichmäßig. Wenn jedoch I ein endliches Intervall ist, dann existiert eine Zahl $M > 0$, sodass $|x - a| < M$ für alle $x \in I$ gilt. Somit ist durch die Wahl $\eta < \frac{\varepsilon}{M+1}$ die Bedingung (7) für jedes $x \in I$ erfüllt, wodurch die Konvergenz gleichmäßig ist.

Für den Beweis der letzten Aussage ist der Schlüssel die Ungleichung:

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x)\right| \leq \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x}\right| + \left|\frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x} - f_N'(x)\right| + |f_N'(x) - g(x)|.$$

Wir zeigen, dass dies durch geschickte Wahl der Zahlen N und y beliebig klein gemacht werden kann. Wählen wir die Zahl $N \in \mathbb{N}$ wiederum so, dass im Fall $m, n \geq N$ an jeder Stelle $x \in I$

$$|f_n'(x) - f_m'(x)| < \eta$$

erfüllt ist. Dann erhalten wir durch den Grenzübergang $m \to \infty$, dass für alle $x \in I$ gilt:

$$|f_N'(x) - g(x)| \leq \eta.$$

Sei $m > N$ und wenden wir den Mittelwertsatz von Lagrange auf die Funktion $h = f_m - f_N$ und für einen beliebigen Punkt $x, y \in I$, $x \neq y$ an. Dies bedeutet, dass

$$\left|\frac{f_m(y) - f_m(x)}{y - x} - \frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x}\right| = \left|\frac{(f_m(y) - f_N(y)) - (f_m(x) - f_N(x))}{y - x}\right| = |f_m'(\xi_m) - f_N'(\xi_m)| < \eta.$$

Daraus erhalten wir durch den Grenzübergang $m \to \infty$, dass

$$\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x}\right| \leq \eta.$$

Schließlich wissen wir, dass f_N auf dem Intervall I differenzierbar ist, also auch im Punkt $x \in I$, d.h. zu der Zahl $\eta > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodass für jedes $y \in B(x, \delta) \cap I$ gilt:

$$\left|\frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x} - f_N'(x)\right| < \eta.$$

Zusammenfassend haben wir zu einem gegebenen $x \in I$ für jede Zahl $\eta > 0$ ein $\delta > 0$ gefunden, sodass, wenn $y \in B(x, \delta) \cap I$, dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - g(x)\right| &\leq \left|\frac{f(y) - f(x)}{y - x} - \frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x}\right| \\ &\quad + \left|\frac{f_N(y) - f_N(x)}{y - x} - f_N'(x)\right| + |f_N'(x) - g(x)| < 3\eta.\end{aligned}$$

□

Index