Anwendung der Analysis: Nullstellen, Fixpunkte und Extremwerte

András Bátkai

22. März 2026

In diesem Kapitel widmen wir uns der praktischen Anwendung der bisher erlernten analytischen Werkzeuge. Die theoretischen Resultate der Analysis, wie der Zwischenwertsatz, Monotoniekriterien oder Fixpunktsätze, bieten uns mächtige Methoden, um die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen von Gleichungen zu untersuchen und diese auch numerisch effizient zu berechnen.

1 Gleichungslösen und Definitionsbereiche

Oftmals lässt sich eine Gleichung bereits durch eine genaue Untersuchung des Definitionsbereiches oder des Wertebereiches der beteiligten Funktionen vereinfachen oder sogar vollständig lösen.

Beispiel 1.1. *Lösen Sie die folgende Gleichung in den reellen Zahlen:*

$$\sqrt{x-6}+\sqrt{6-x}=x^2-5x-6$$

Lösung: *Bevor wir algebraische Umformungen vornehmen, untersuchen wir den Definitionsbereich der linken Seite. Die Wurzeln sind im Reellen nur für nicht-negative Argumente definiert. Es muss also simultan gelten:*

$$\begin{aligned} x-6\geq 0 &\implies x\geq 6\\ 6-x\geq 0 &\implies x\leq 6 \end{aligned}$$

Die einzige reelle Zahl, die beide Bedingungen erfüllt, ist $x=6$. Dies bedeutet, dass die Gleichung höchstens diese eine Lösung haben kann. Wir setzen $x=6$ zur Probe ein:

$$\sqrt{0}+\sqrt{0}=6^2-5\cdot 6-6 \implies 0=36-30-6 \implies 0=0$$

Die einzige Lösung ist somit tatsächlich $x=6$.

Beispiel 1.2. *Lösen Sie die folgende Gleichung in den reellen Zahlen:*

$$\sqrt[8]{1-x^2}+\sqrt[4]{x^4-1}=3^x-\log_3(2+x^6)$$

Lösung: *Diese Gleichung sieht durch algebraische Umformungen unlösbar aus. Wir untersuchen stattdessen zuerst den Definitionsbereich der linken Seite der Gleichung. Die Wurzeln mit geradem Exponenten sind im Reellen nur für nicht-negative Argumente definiert. Es muss also simultan gelten:*

$$\begin{aligned} 1-x^2\geq 0 &\implies x^2\leq 1 \implies x\in[-1,1]\\ x^4-1\geq 0 &\implies x^4\geq 1 \implies x\in]-\infty,-1]\cup[1,\infty[\end{aligned}$$

Die einzigen reellen Zahlen, die beide Bedingungen gleichzeitig erfüllen, sind $x_1 = 1$ und $x_2 = -1$. Wir setzen diese beiden verbleibenden Kandidaten in die Gleichung ein, um sie zu prüfen:

Für $x_1 = 1$:

$$0 + 0 = 3^1 - \log_3(2 + 1) \implies 0 = 3 - 1 \implies 0 = 2 \quad \textit{(falsch)}$$

Für $x_2 = -1$:

$$0 + 0 = 3^{-1} - \log_3(2 + 1) \implies 0 = \frac{1}{3} - 1 \implies 0 = -\frac{2}{3} \quad \textit{(falsch)}$$

Da keiner der beiden möglichen Kandidaten die Gleichung erfüllt, besitzt diese Gleichung keine Lösung.

2 Monotonie beim Lösen von Gleichungen

Die Eigenschaft der strengen Monotonie einer Funktion ist ein hervorragendes Werkzeug, um die Eindeutigkeit von Lösungen nachzuweisen. Wenn eine Funktion f streng monoton wachsend (oder fallend) ist, nimmt sie jeden Wert höchstens einmal an. Gilt also $f(x) = f(y)$, so folgt zwingend $x = y$.

Satz 2.1 (streng monotone Funktionen)**.** *Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $f : I \to \mathbb{R}$ eine streng monotone Funktion. Dann hat die Gleichung $f(x) = c$ für ein beliebiges $c \in \mathbb{R}$ höchstens eine Lösung in I.*

Beispiel 2.1. *Lösen Sie die Gleichung $2^x + 3^x = 2$.*

Lösung: *Wir betrachten die Funktion $f(x) = 2^x + 3^x$. Da die Exponentialfunktionen 2^x und 3^x für Basen größer als 1 auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend sind, ist auch ihre Summe $f(x)$ streng monoton wachsend. Daher nimmt $f(x)$ den Wert 2 höchstens einmal an. Durch Einsetzen kleiner ganzer Zahlen finden wir durch bloßes Hinsehen, dass $f(0) = 2^0 + 3^0 = 1 + 1 = 2$. Wegen der strengen Monotonie ist $x = 0$ die eindeutige Lösung.*

Beispiel 2.2. *Lösen Sie die Gleichung $x^5 - 10x^3 + 50x - 41 = 0$.*

Lösung: *Durch Probieren finden wir leicht die Lösung $x_0 = 1$, da $1 - 10 + 50 - 41 = 0$. Um zu prüfen, ob es weitere Lösungen gibt, definieren wir $f(x) = x^5 - 10x^3 + 50x - 41$ und untersuchen das Monotonieverhalten über die erste Ableitung:*

$$f'(x) = 5x^4 - 30x^2 + 50 = 5(x^4 - 6x^2 + 10)$$

Wir substituieren $z = x^2$ in der Klammer und betrachten $z^2 - 6z + 10$. Die Diskriminante dieser quadratischen Gleichung ist $(-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 10 = 36 - 40 = -4 < 0$. Daher hat $z^2 - 6z + 10 = 0$ keine reellen Nullstellen. Weil der Funktionsgraph nach oben geöffnet ist, gilt stets $z^2 - 6z + 10 > 0$. Rückübersetzt bedeutet das, dass $f'(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Die Funktion f ist somit auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsend. Folglich ist $x = 1$ die einzige reelle Lösung.

Beispiel 2.3. *Lösen Sie die folgende Gleichung:*

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{\sin x} - \sqrt[21]{\sin x} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\cos x} - \sqrt[21]{\cos x}$$

Lösung: *Wir definieren die folgende Hilfsfunktion:*

$$f(u) = \left(\frac{1}{2}\right)^u - \sqrt[21]{u}$$

Wir untersuchen das Monotonieverhalten von f. Die Exponentialfunktion $u \mapsto (1/2)^u$ ist streng monoton fallend. Ebenso ist die Wurzelfunktion $u \mapsto \sqrt[21]{u}$ streng monoton wachsend, weshalb $-\sqrt[21]{u}$ streng monoton fallend ist. Die Summe zweier streng monoton fallender Funktionen ist wiederum streng monoton fallend. Damit ist f injektiv (nimmt jeden Wert höchstens einmal an).

Unsere ursprüngliche Gleichung hat exakt die Form $f(\sin x) = f(\cos x)$. Wegen der Injektivität von f folgt daraus zwingend, dass die Argumente gleich sein müssen:

$$\sin x = \cos x$$

Im Intervall $[0, 2\pi)$ hat diese trigonometrische Gleichung die Lösungen $x = \frac{\pi}{4}$ und $x = \frac{5\pi}{4}$. Allgemein lauten die Lösungen somit $x = \frac{\pi}{4} + k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$.

Beispiel 2.4 (Monotonie bei Gleichungssystemen)**.** *Lösen Sie folgendes Gleichungssystem in den reellen Zahlen:*

$$(1) \quad x - y = 2^y - 2^x$$
$$(2) \quad x^2 + y^2 = 1$$

Lösung: *Wir formen die erste Gleichung so um, dass die Variablen separiert sind:*

$$x + 2^x = y + 2^y$$

Wir betrachten nun die Funktion $g(t) = t + 2^t$. Da sowohl die Funktion $t \mapsto t$ als auch $t \mapsto 2^t$ auf ganz $\mathbb{R}$ streng monoton wachsende Funktionen sind, ist auch deren Summe g streng monoton wachsend und somit injektiv. Die Gleichung $g(x) = g(y)$ kann daher nur erfüllt sein, wenn $x = y$ gilt. Setzen wir die Erkenntnis $x = y$ in die zweite Gleichung ein, erhalten wir:

$$x^2 + x^2 = 1 \implies 2x^2 = 1 \implies x^2 = \frac{1}{2} \implies x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Das System hat also genau zwei Lösungspaare: $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ und $\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

3 Der Zwischenwertsatz und die Existenz von Lösungen

Während uns die Monotonie oft die Eindeutigkeit einer Lösung liefert, gibt uns der Zwischenwertsatz (Satz von Bolzano) ein Kriterium für die Existenz einer Lösung an die Hand.

Satz 3.1 (Nullstellensatz von Bolzano)**.** *Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Gilt $f(a) \cdot f(b) < 0$, so existiert mindestens ein $z \in]a, b[$ mit $f(z) = 0$.*

Beispiel 3.1. *Zeigen Sie, dass die Gleichung $x = \cos(x)$ in dem Intervall $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ genau eine Lösung hat.*

Lösung: *Wir definieren die stetige Funktion $g(x) = x - \cos(x)$ und werten sie an den Rändern aus: $g(0) = -1 < 0$ und $g\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert mindestens eine Nullstelle $z \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$. Da $g'(x) = 1 + \sin(x) > 0$ auf diesem Intervall, ist g streng monoton wachsend. Die Nullstelle ist somit eindeutig.*

4 Weierstraß und das Maximum/Minimum

Satz 4.1 (Satz von Weierstraß). *Jede auf einem kompakten Intervall* $[a,b]$ *stetige Funktion* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *nimmt dort ihr Minimum und Maximum an. Es existieren also* $x_{min}, x_{max} \in [a,b]$ *mit* $f(x_{min}) \leq f(x) \leq f(x_{max})$ *für alle* $x \in [a,b]$.

Mit diesem Satz können wir Wertebereiche von Funktionen bestimmen und so feststellen, ob eine Gleichung $f(x) = c$ überhaupt lösbar ist (nämlich genau dann, wenn c im Wertebereich liegt).

Beispiel 4.1. *Lösen Sie die folgende Gleichung:*

$$\sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) = x^2 - 4x + 5$$

Lösung: *Wir betrachten die Wertebereiche der Funktionen auf der linken und rechten Seite der Gleichung. Sei* $f(x) = \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right)$ *und* $g(x) = x^2 - 4x + 5$. *Durch quadratische Ergänzung erhalten wir für* $g(x)$*:*

$$g(x) = (x-2)^2 + 1$$

Da das Quadrat einer reellen Zahl stets nicht-negativ ist, gilt $g(x) \geq 1$. *Der Wertebereich von* g *ist somit* $R_g = [1, \infty[$. *Für die Sinusfunktion gilt unabhängig vom Argument stets* $-1 \leq \sin(\dots) \leq 1$. *Der Wertebereich von* f *ist also* $R_f = [-1, 1]$. *Damit die Gleichung* $f(x) = g(x)$ *erfüllt ist, müssen beide Seiten denselben Wert annehmen. Der einzige Wert, der in beiden Wertebereichen liegt, ist* $y = 1$, *also* $R_f \cap R_g = \{1\}$. *Es muss somit simultan gelten:*

$$\begin{aligned} x^2 - 4x + 5 = 1 &\implies (x-2)^2 = 0 \implies x = 2 \\ \sin\left(\frac{\pi x}{4}\right) &= 1 \end{aligned}$$

Setzen wir $x = 2$ *zur Überprüfung in die zweite Gleichung ein, erhalten wir* $\sin\left(\frac{2\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$. *Dies ist eine wahre Aussage. Die eindeutige Lösung der Gleichung ist somit* $x = 2$.

Beispiel 4.2. *Lösen Sie die folgende Gleichung:*

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} = \sin^7(x) + 3$$

Lösung: *Auch hier untersuchen wir die Wertebereiche beider Seiten, um die Lösbarkeit zu prüfen. Wir beginnen mit der rechten Seite* $h(x) = \sin^7(x) + 3$. *Da* $-1 \leq \sin(x) \leq 1$ *gilt, ist auch* $-1 \leq \sin^7(x) \leq 1$. *Daraus folgt durch Addition von 3:*

$$2 \leq \sin^7(x) + 3 \leq 4$$

Der Wertebereich der rechten Seite liegt also im Intervall $R_h = [2, 4]$.

Nun betrachten wir die linke Seite $k(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3}$. *Um den Wertebereich zu bestimmen, suchen wir alle Parameter* $a \in \mathbb{R}$, *für die die Gleichung* $k(x) = a$ *eine reelle Lösung für* x *besitzt:*

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + 3} = a \implies x^2 - 2x + 1 = a(x^2 + 3) \implies (a-1)x^2 + 2x + (3a-1) = 0$$

Für $a \neq 1$ handelt es sich um eine quadratische Gleichung. Diese hat genau dann reelle Lösungen, wenn ihre Diskriminante nicht-negativ ist ($D \geq 0$):

$$2^2 - 4(a-1)(3a-1) \geq 0$$

$$4 - 4(3a^2 - 4a + 1) \geq 0 \implies 1 - (3a^2 - 4a + 1) \geq 0 \implies -3a^2 + 4a \geq 0$$

Dies lässt sich umformen zu $3a^2 - 4a \leq 0$, was bedeutet, dass a im Intervall $\left[0, \frac{4}{3}\right]$ liegen muss. Der Wertebereich der linken Seite ist folglich $R_k = \left[0, \frac{4}{3}\right]$.

Vergleichen wir abschließend die beiden Wertebereiche: Die linke Seite kann höchstens den Wert $\frac{4}{3}$ (also ca. $1,33$) annehmen, während die rechte Seite mindestens den Wert 2 annimmt. Da die Wertebereiche strikt voneinander getrennt sind ($R_k \cap R_h = \emptyset$), besitzt diese Gleichung keine reelle Lösung.

5 Fixpunkte und monotone Iteration

Viele Gleichungen lassen sich nicht direkt nach x auflösen. Ein mächtiger Ansatz ist es, die Gleichung $g(x) = 0$ in eine äquivalente Form $f(x) = x$ umzuwandeln. Einen Punkt z, für den $f(z) = z$ gilt, nennen wir einen *Fixpunkt* der Funktion f.

Ein natürlicher Weg, einen solchen Fixpunkt zu finden, ist die Fixpunktiteration. Wir starten mit einem Startwert $x_0 \in D(f)$ und definieren rekursiv eine Folge:

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Die entscheidende Frage ist: Unter welchen Bedingungen konvergiert diese Folge gegen einen Fixpunkt? Ein erstes starkes Resultat erhalten wir für monotone Funktionen.

Satz 5.1 (Fixpunktsatz für monotone Funktionen)**.** *Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine stetige und monoton wachsende Funktion. Dann besitzt f mindestens einen Fixpunkt $z \in [a,b]$. Dieser Fixpunkt kann als Grenzwert der Iterationsfolge $x_{n+1} = f(x_n)$ für einen geeigneten Startwert $x_0 \in [a,b]$ gefunden werden.*

Beweis. Da der Wertebereich von f in $[a,b]$ liegt, ist die Folge (x_n) offensichtlich durch a nach unten und durch b nach oben beschränkt. Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass die Folge monoton ist. Angenommen, für den Startwert x_0 gilt $x_1 \geq x_0$ (wobei $x_1 = f(x_0)$). Gilt $x_n \geq x_{n-1}$ für ein $n \in \mathbb{N}$, so folgt aus der Monotonie von f:

$$x_{n+1} = f(x_n) \geq f(x_{n-1}) = x_n$$

Die Folge (x_n) ist also monoton wachsend und nach oben beschränkt. Nach dem Monotoniekriterium konvergiert sie gegen einen Grenzwert z. Da das Intervall $[a,b]$ abgeschlossen ist, liegt z in $[a,b]$. Aufgrund der Stetigkeit von f können wir den Limes in das Argument ziehen:

$$z = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = f\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = f(z)$$

Damit ist bewiesen, dass z ein Fixpunkt ist. (Gilt $x_1 \leq x_0$, verläuft der Beweis völlig analog für eine monoton fallende Folge). □

Wichtig: Die Funktion f muss immer monoton wachsend sein, die Folge wird dann Monoton. Ob die Folge wachsend oder fallend ist, entscheidet der erste Schritt.

Beispiel 5.1 (Monotone Iteration). *Betrachten wir die Funktion $f(x) = \sin(x)$ auf dem Intervall $D(f) = [-1, 1]$. Da die Ableitung $f'(x) = \cos(x)$ auf diesem Intervall positiv ist, ist f streng monoton wachsend. Zudem gilt $R(f) \subset [-1, 1]$. Wählen wir einen Startwert $x_0 \in [-1, 1]$, so konvergiert die durch $x_{n+1} = \sin(x_n)$ definierte Folge gegen die Lösung von $x = \sin(x)$, also gegen $z = 0$. Wegen $|\sin(x)| \leq |x|$ gilt: Starten wir mit $x_0 > 0$, fällt die Folge ($x_1 \leq x_0$). Starten wir mit $x_0 < 0$, wächst die Folge ($x_1 \geq x_0$).*

Beispiel 5.2 (Verschachtelte Funktionen und Fixpunkte). *Lösen Sie die folgende Gleichung:*

$$\sqrt{7 + \sqrt{7 + x}} = x$$

Lösung: *Wir definieren die Funktion $f(x) = \sqrt{7 + x}$. Die Gleichung hat dann die iterierte Form:*

$$f(f(x)) = x$$

Es gilt folgender nützlicher Satz: Wenn eine Funktion f streng monoton wachsend ist, dann haben die Gleichungen $f(f(x)) = x$ und $f(x) = x$ exakt dieselben Lösungen. (Ein Beweis hierfür lässt sich leicht indirekt führen: Wäre etwa $f(x) > x$, so würde aus der strengen Monotonie $f(f(x)) > f(x) > x$ folgen, was im Widerspruch zu $f(f(x)) = x$ steht).

Da die Funktion $f(x) = \sqrt{7 + x}$ streng monoton wachsend ist, genügt es, die wesentlich einfachere Fixpunktgleichung $f(x) = x$ zu lösen:

$$\sqrt{7 + x} = x$$

Da die linke Seite (als Wurzel) stets positiv ist, muss zwingend $x \geq 0$ gelten. Wir quadrieren beide Seiten:

$$7 + x = x^2 \implies x^2 - x - 7 = 0$$

Die Mitternachtsformel liefert die beiden Lösungen der quadratischen Gleichung:

$$x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(1)(-7)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{29}}{2}$$

Wegen der Bedingung $x \geq 0$ entfällt die negative Lösung $\frac{1-\sqrt{29}}{2}$. Die einzige Lösung der ursprünglichen, verschachtelten Gleichung ist somit:

$$x = \frac{1 + \sqrt{29}}{2}$$

6 Fixpunkte und das Kontraktionsprinzip

Der Satz für monotone Funktionen liefert zwar die Existenz, sagt aber wenig über die Eindeutigkeit oder die Geschwindigkeit der Konvergenz (Fehlerabschätzung) aus. Hier hilft uns der Begriff der Kontraktion.

Definition 6.1. *Eine Funktion $f : H \to \mathbb{R}$ mit $H \subset \mathbb{R}$ heißt Lipschitz-stetig, wenn es ein $L > 0$ gibt, sodass für alle $x, y \in H$ gilt:*

$$|f(x) - f(y)| \leq L|x - y|$$

Kann man das L so wählen, dass $L = q \in]0, 1[$ gilt, nennt man f eine Kontraktion.

Satz 6.1 (Banachscher Fixpunktsatz). *Sei $H \subset \mathbb{R}$ abgeschlossen und $f : H \to H$ eine Kontraktion. Das heißt, es existiert eine Konstante $q \in]0,1[$, sodass für alle $x, y \in H$ gilt:*

$$|f(x) - f(y)| \leq q|x - y|$$

Dann besitzt f genau einen Fixpunkt $z \in H$. Für die Iterationsfolge $x_{n+1} = f(x_n)$ mit beliebigem Startwert $x_0 \in H$ gilt die (A-priori-)Fehlerabschätzung:

$$|x_n - z| \leq \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|$$

Beweis. 1. Existenz (Cauchy-Folge): Sei $x_0 \in H$ beliebig und $x_{n+1} = f(x_n)$. Für den Abstand zweier aufeinanderfolgender Glieder gilt wegen der Kontraktionseigenschaft:

$$\begin{aligned}
|x_2 - x_1| &= |f(x_1) - f(x_0)| \leq q|x_1 - x_0| \\
|x_3 - x_2| &= |f(x_2) - f(x_1)| \leq q|x_2 - x_1| \leq q^2|x_1 - x_0| \\
&\vdots \\
|x_{n+1} - x_n| &\leq q^n|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

Um zu zeigen, dass (x_n) konvergiert, nutzen wir die geometrische Summenformel, um den Abstand beliebiger Glieder abzuschätzen ($k > 0$):

$$\begin{aligned}
|x_{n+k} - x_n| &= \left|\sum_{i=1}^{k}(x_{n+i} - x_{n+i-1})\right| \leq \sum_{i=1}^{k}|x_{n+i} - x_{n+i-1}| \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} q^{n+i-1}|x_1 - x_0| = q^n|x_1 - x_0|\sum_{j=0}^{k-1} q^j \\
&\leq q^n|x_1 - x_0|\sum_{j=0}^{\infty} q^j = \frac{q^n}{1-q}|x_1 - x_0|
\end{aligned}$$

Da $q \in]0,1[$, geht q^n für $n \to \infty$ gegen 0. Somit ist (x_n) eine Cauchy-Folge in $\mathbb{R}$. Weil H abgeschlossen ist, liegt der Grenzwert $z = \lim_{n\to\infty} x_n$ in H. Wegen der Stetigkeit von f gilt $f(z) = z$.

2. Eindeutigkeit: Angenommen, es gäbe einen weiteren Fixpunkt $y^* \in H$ mit $y^* = f(y^*)$ und $y^* \neq z$. Dann gilt:

$$|z - y^*| = |f(z) - f(y^*)| \leq q|z - y^*|$$

Da $q < 1$, ist dies nur für $|z - y^*| = 0$ möglich, also $z = y^*$.

3. Fehlerabschätzung: Lässt man in der obigen Ungleichung für die Cauchy-Folge $k \to \infty$ gehen, erhält man direkt die A-priori-Abschätzung. □

Beispiel 6.1 (Banachscher Fixpunktsatz). *Betrachten wir die Gleichung* $\cos(x) = 2x$. *Dies ist äquivalent zu $x = \frac{\cos(x)}{2} =: f(x)$. Wir betrachten das Intervall $H = [0, 0,5]$. Dort gilt $R(f) \subset H$. Für die Ableitung gilt $f'(x) = -\frac{\sin(x)}{2}$. Damit ist $|f'(x)| \leq \frac{1}{2} = q < 1$. Nach dem Mittelwertsatz ist f also eine Kontraktion mit $q = 0,5$. Es existiert genau ein Fixpunkt in H. Für die Konvergenzgeschwindigkeit gilt:*

$$|x_n - z| \leq \frac{(0,5)^n}{1-0,5}|x_1 - x_0| = 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n |x_1 - x_0|$$

Mit jedem Iterationsschritt halbiert sich der maximale Fehler. Dies nennt man lineare Konvergenz[1].

[1] Auch wenn der Fehler sich wie eine geometrische Folge verhält.

7 Das Newton-Verfahren zur numerischen Lösung

Das Newton-Verfahren bietet eine hocheffiziente numerische Methode, um Nullstellen und damit Lösungen beliebiger differenzierbarer Gleichungen approximativ zu berechnen. Die geometrische Grundidee besteht darin, die Funktion f in der Nähe eines Startwertes x_0 durch ihre Tangente zu ersetzen. Die Iterationsvorschrift lautet:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$$

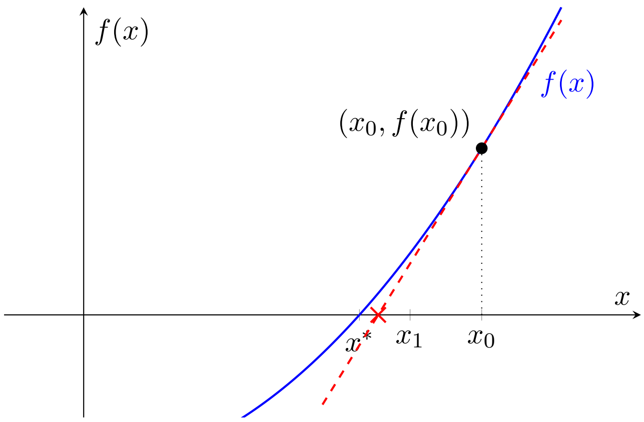

Abbildung 1: Geometrische Veranschaulichung eines Schrittes im Newton-Verfahren. Die Tangente an der Stelle x_0 schneidet die x-Achse in der neuen Näherung x_1.

Während die einfache Fixpunktiteration meist nur linear konvergiert, bietet das Newton-Verfahren unter bestimmten Bedingungen eine deutlich schnellere, nämlich *quadratische Konvergenz.*

Satz 7.1 (Konvergenz und Fehlerabschätzung des Newton-Verfahrens)**.** *Sei $f : I \to \mathbb{R}$ auf einem Intervall I zweimal stetig differenzierbar. Sei $x^* \in I$ eine einfache Nullstelle von f, d.h. $f(x^*) = 0$ und $f'(x^*) \neq 0$. Dann existiert eine Umgebung U um x^*, sodass für jeden Startwert $x_0 \in U$ das Newton-Verfahren gegen x^* konvergiert. Für den Fehler $e_n = x_n - x^*$ gilt die quadratische Fehlerabschätzung:*

$$|e_{n+1}| \leq C \cdot |e_n|^2$$

für eine Konstante $C > 0$.

Beweis. Wir entwickeln die Funktion f um den aktuellen Iterationspunkt x_n mittels des Satzes von Taylor (zweites Taylor-Polynom mit Restglied):

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x - x_n)^2$$

wobei ξ zwischen x_n und x liegt. Wir werten diese Entwicklung an der exakten Nullstelle $x = x^*$ aus. Da $f(x^*) = 0$ ist, ergibt sich:

$$0 = f(x_n) + f'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{1}{2}f''(\xi)(x^* - x_n)^2$$

Wir dividieren diese Gleichung durch $f'(x_n)$ (was nahe x^* ungleich 0 ist, da $f'(x^*) \neq 0$ vorausgesetzt wurde):

$$0 = \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} + (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

Aus der Definition des Newton-Verfahrens wissen wir, dass $\frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - x_{n+1}$. Wir setzen dies ein:

$$0 = (x_n - x_{n+1}) + (x^* - x_n) + \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(x^* - x_n)^2$$

Dies vereinfacht sich zu:

$$x_{n+1} - x^* = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)}(x_n - x^*)^2$$

Mit der Fehlerdefinition $e_n = x_n - x^*$ haben wir also:

$$e_{n+1} = \frac{f''(\xi)}{2f'(x_n)} \cdot e_n^2$$

Da f' und f'' stetig sind und $f'(x^*) \neq 0$, können wir in einer ausreichend kleinen Umgebung um x^* den Vorfaktor durch eine Konstante C nach oben abschätzen, wobei $C = \max \left|\frac{f''(x)}{2f'(y)}\right|$ in dieser Umgebung ist. Somit folgt:

$$|e_{n+1}| \leq C \cdot |e_n|^2$$

Liegt der Startwert so nah an x^*, dass $C \cdot |e_0| < 1$ ist, so konvergiert die Folge (e_n) rasant gegen 0. Bei quadratischer Konvergenz verdoppelt sich in jedem Schritt ungefähr die Anzahl der korrekten Nachkommastellen! □

Beispiel 7.1. *Leiten Sie mit Hilfe des Newton-Verfahrens eine Iterationsvorschrift zur Berechnung der Wurzel aus $a > 0$ her.*
Lösung: *Wir suchen die positive Nullstelle der Funktion $f(x) = x^2 - a$. Die Ableitung lautet $f'(x) = 2x$. Setzen wir dies in die Iterationsvorschrift ein, erhalten wir das Heron-Verfahren (oder babylonisches Wurzelziehen):*

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - a}{2x_k} = \frac{1}{2}\left(x_k + \frac{a}{x_k}\right)$$

8 Numerische Optimierung: Die Suche nach dem Minimum

Der Satz von Weierstraß hat uns garantiert, dass stetige Funktionen auf kompakten Intervallen stets ein Minimum und ein Maximum annehmen. Doch wie finden wir diese Extremstellen in der Praxis, wenn wir die Gleichung nicht algebraisch exakt lösen können?

Nach dem Satz von Fermat wissen wir: Besitzt eine differenzierbare Funktion f an einer Stelle x^* ein lokales Extremum im Inneren des Definitionsbereichs, so muss dort notwendigerweise $f'(x^*) = 0$ gelten. Die Suche nach einem Minimum ist also im Kern wieder die Suche nach der Nullstelle einer Funktion – in diesem Fall der Ableitungsfunktion f'.

Eine sehr anschauliche Methode zur Minimumsuche im Eindimensionalen ist das *Gradientenverfahren*. Stellen Sie sich vor, Sie stehen im dichten Nebel an einem Berghang und möchten ins Tal. Sie sehen das Tal nicht, aber Sie spüren die Neigung des Bodens unter Ihren Füßen. Die logische Strategie: Gehen Sie immer in die Richtung, in der es bergab geht[2]. Etwas weniger gefährlich: wenn sie am Berghang einen Ball loslassen, der wird in die Richtung rollen, wo es am steilsten ist.

Mathematisch ist die Steigung durch die Ableitung $f'(x)$ gegeben. Zeigt die Steigung nach oben ($f'(x) > 0$), müssen wir nach links (zu kleineren x-Werten) gehen, um das

[2] Bitte nicht, das ist lebensgefährlich!

Minimum zu finden. Ist die Steigung negativ ($f'(x) < 0$), müssen wir nach rechts. Wir bewegen uns also stets *entgegen* dem Vorzeichen der Ableitung. Dies führt auf die iterative Vorschrift:

$$x_{n+1} = x_n - \gamma \cdot f'(x_n)$$

Der Parameter $\gamma > 0$ heißt *Schrittweite* oder (insbesondere in modernen Anwendungen des maschinellen Lernens) *Lernrate*.

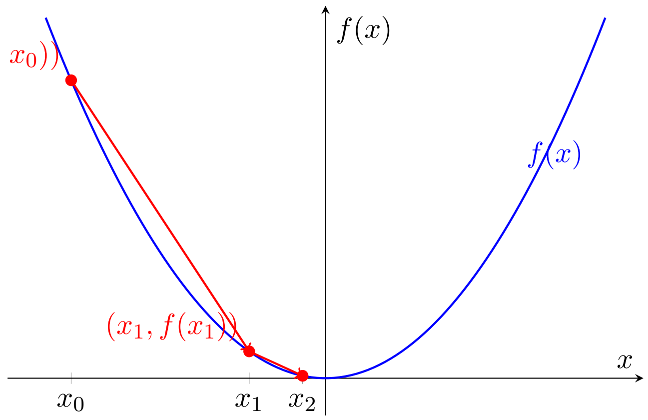

Abbildung 2: Veranschaulichung des eindimensionalen Gradientenverfahrens. Ausgehend von x_0 wandern wir entgegen der lokalen Steigung schrittweise in das Tal, um das Minimum zu approximieren.

Die Wahl von γ ist in der Praxis entscheidend: Ist γ zu klein, kriecht das Verfahren unendlich langsam ins Tal. Ist γ zu groß, machen wir zu weite Schritte und springen möglicherweise auf die andere Seite des Tals hin und her (Oszillation) oder divergieren sogar aus dem Tal heraus.

Hier kommt uns eine wichtige Erkenntnis zu Hilfe: Wir kennen bereits ein extrem schnelles, quadratisch konvergierendes Verfahren zur Nullstellensuche – das Newton-Verfahren. Wenden wir die Iterationsvorschrift des Newton-Verfahrens ($x_{n+1} = x_n - \frac{g(x_n)}{g'(x_n)}$) auf unsere Zielfunktion $g(x) = f'(x)$ an, so erhalten wir sofort:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f'(x_n)}{f''(x_n)}$$

Vergleichen wir dies mit dem Gradientenverfahren, offenbart sich ein wunderschöner Zusammenhang: *Das Newton-Verfahren zur Optimierung ist im Grunde ein Gradientenverfahren, bei dem die Schrittweite $\gamma_n = \frac{1}{f''(x_n)}$ in jedem Schritt automatisch und dynamisch perfekt gewählt wird!*

Die zweite Ableitung (also die Krümmung der Funktion) steuert die Schrittweite vollautomatisch: Ist die Krümmung gering (ein flaches, weites Tal), führt der kleine Nenner zu einem großen Schritt. Ist die Krümmung stark (ein steiles, enges Tal), wird der Nenner groß und bremst den Schritt ab, um das Minimum nicht zu überspringen.

Beispiel 8.1. *Bestimmen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 2$ mit einem Schritt des Newton-Verfahrens eine Näherung für das lokale Minimum der Funktion $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - x$.*

Lösung: *Um das Minimum zu finden, suchen wir die Nullstelle der ersten Ableitung $f'(x) = x^3 - 1$. Für das Newton-Verfahren benötigen wir auch die zweite Ableitung (die Krümmung): $f''(x) = 3x^2$. Wir setzen unseren Startwert in die Iterationsvorschrift ein:*

$$x_1 = x_0 - \frac{f'(x_0)}{f''(x_0)} = 2 - \frac{2^3 - 1}{3 \cdot 2^2} = 2 - \frac{8 - 1}{12} = 2 - \frac{7}{12} = \frac{17}{12} \approx 1,416$$

Da $f''\left(\frac{17}{12}\right) > 0$ ist, ist die Kurve hier konvex (linksgekrümmt), wir nähern uns also tatsächlich einem lokalen Minimum. Führt man die Iteration weiter, konvergiert die Folge rasend schnell gegen den exakten Wert $x^* = 1$.

9 Übungsaufgaben

Aufgabe 9.1. *Untersuchen Sie den Definitionsbereich und lösen Sie die Gleichung in den reellen Zahlen:*

$$\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} = x^2 - 4$$

Aufgabe 9.2. *Zeigen Sie mit Hilfe der Monotonie, dass die Gleichung $3^x + 4^x = 5^x$ genau eine Lösung in $\mathbb{R}$ besitzt. (Tipp: Dividieren Sie die Gleichung durch 5^x).*

Aufgabe 9.3. *Beweisen Sie mit dem Nullstellensatz von Bolzano, dass das Polynom $p(x) = x^3 - x - 1$ im Intervall $[1, 2]$ eine Nullstelle hat.*

Aufgabe 9.4. *Gegeben ist die Funktion $f(x) = x^3 - 2$. Führen Sie zwei Schritte des Newton-Verfahrens zur Nullstellensuche mit dem Startwert $x_0 = 1,5$ durch, um $\sqrt[3]{2}$ näherungsweise zu berechnen.*

Aufgabe 9.5. *Sie möchten das Minimum der Funktion $f(x) = x^4 + 2x^2 + 3$ numerisch bestimmen.*

a) *Formulieren Sie die Iterationsvorschrift für das Gradientenverfahren mit einer allgemeinen Lernrate γ.*

b) *Formulieren Sie die Iterationsvorschrift für das Newton-Verfahren zur Optimierung.*

c) *Führen Sie ausgehend vom Startwert $x_0 = 1$ jeweils einen Iterationsschritt durch (verwenden Sie beim Gradientenverfahren $\gamma = 0,1$) und vergleichen Sie, welcher Wert näher am offensichtlichen Minimum $x^* = 0$ liegt.*