

FOURIER-REIHEN

Die Theorie der Fourier-Reihen begann sich Ende des 18. Jahrhunderts im Zusammenhang mit mechanischen und thermischen Untersuchungen zu entwickeln. In unserem Skript werden wir am Ende dieses Kapitels sehen, wie Potenzreihen und Fourier-Reihen auf natürliche Weise im Zusammenhang mit bestimmten Differentialgleichungen auftreten.

Der Kernpunkt ist, dass wir, während wir bei Taylor-Reihen Funktionen in Form von Potenzreihen darstellen wollten, in der Theorie der Fourier-Reihen versuchen, die gegebene Funktion f durch sogenannte *trigonometrische Polynome* anzunähern. Genauer gesagt suchen wir nach einer Darstellung der Form

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)).$$

Ähnlich wie bei den Taylor-Reihen stellen sich zwei grundlegende Fragen:

- Wie berechnet man die Koeffizienten a_n und b_n ?
- Was garantiert die Konvergenz?

Bevor wir in unseren Untersuchungen fortfahren, wollen wir Folgendes festhalten: Wenn eine Funktion f als eine solche trigonometrische Reihe dargestellt werden kann, dann ist f 2π -periodisch. Daher reicht es für unsere weiteren Untersuchungen aus, uns auf ein Intervall der Länge 2π zu konzentrieren, zum Beispiel das Intervall $[-\pi, \pi]$.

Um die erste Frage zu untersuchen, nehmen wir an, dass

die Funktionenreihe (1) gleichmäßig konvergent ist.

Diese Bedingung ermöglicht es uns, durch einige formale Umformungen die Koeffizienten a_n und b_n eindeutig zu bestimmen.

Bestimmen wir zunächst die Koeffizienten a_n . Wir fixieren die Zahl $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ und multiplizieren die Gleichung (1) mit $\cos(kx)$. Dadurch erhalten wir

$$f(x) \cos(kx) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) \cos(kx) + b_n \sin(nx) \cos(kx)).$$

Da dies eine gleichmäßig konvergente Funktionenreihe aus integrierbaren Funktionen ist, gilt basierend auf dem, was wir im letzten Semester gelernt haben, dass $f \in R[-\pi, \pi]$, sodass wir den obigen Ausdruck integrieren können. Unter Berufung auf die gleichmäßige Konvergenz können wir das Integralzeichen hinter das Summenzeichen ziehen, also

$$(2) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx \right).$$

Hier haben wir auf der rechten Seite eine unendliche Reihe erhalten, die Integrale enthält, die wir bereits im letzten Semester berechnet haben.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0,$$

da wir eine ungerade Funktion über ein zum Ursprung symmetrisches Intervall integrieren, siehe Übung.

Wenn $n = k \neq 0$, dann

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos(2kx) + 1) dx = \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(2kx)}{2k} + x \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Wenn $n = k = 0$, dann ist $\cos(kx) \equiv 1$, also

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2(kx) dx = 2\pi.$$

Da

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)}{2},$$

gilt für $n \neq k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \cos(kx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos[(n+k)x] + \cos[(n-k)x]) dx = \left[\frac{\sin[(n+k)x]}{2(n+k)} + \frac{\sin[(n-k)x]}{2(n-k)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Zusammenfassend besteht also die unendliche Reihe auf der rechten Seite des Ausdrucks (2) aus nur einem einzigen von Null verschiedenen Term,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(kx) dx = a_k \pi, \quad \text{wenn } k \neq 0,$$

und

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = a_0 2\pi.$$

Wir können die obige Rechnung fast wörtlich für die Koeffizienten b_n wiederholen. Der einzige Unterschied ist, dass b_0 eine beliebige reelle Zahl sein kann, da er neben der identisch verschwindenden Funktion steht. Damit wir uns im Weiteren nicht darum kümmern müssen, sei der Einfachheit halber

$$b_0 := 0.$$

Wir fixieren die Zahl $k \in \mathbb{N}$ und multiplizieren die Gleichung (1) mit $\sin(kx)$, dann erhalten wir

$$(3) \quad \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = \sum_{n=0}^{\infty} \left(a_n \int_{-\pi}^{\pi} \cos(nx) \sin(kx) dx + b_n \int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx \right).$$

Hier haben wir wieder eine unendliche Reihe auf der rechten Seite erhalten, die Integrale enthält, die wir bereits im letzten Semester berechnet haben.

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \cos(kx) dx = 0,$$

da wir eine ungerade Funktion über ein zum Ursprung symmetrisches Intervall integrieren; dies kam bereits vorhin vor.

Wenn $n = k$, dann

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2(kx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \cos(2kx)) dx = \frac{1}{2} \left[x - \frac{\sin(2kx)}{2k} \right]_{-\pi}^{\pi} = \pi.$$

Da

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)}{2},$$

gilt für $n \neq k$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin(nx) \sin(kx) dx = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos[(n-k)x] - \cos[(n+k)x]) dx = \left[\frac{\sin[(n-k)x]}{2(n-k)} - \frac{\sin[(n+k)x]}{2(n+k)} \right]_{-\pi}^{\pi} = 0.$$

Zusammenfassend besteht also die unendliche Reihe auf der rechten Seite des Ausdrucks (3) aus nur einem einzigen von Null verschiedenen Term,

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(kx) dx = b_k \pi, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Wir konnten also in Kenntnis von f ein Verfahren zur Berechnung der Koeffizienten a_k und b_k angeben. All diese Rechnungen berechtigen uns dazu, für eine beliebige Riemann-integrierbare Funktion ihre spezielle trigonometrische Reihe mit diesen Koeffizienten zu definieren.

1. **Definition.** Sei $f \in R[-\pi, \pi]$ und seien

$$\begin{aligned} a_0 &:= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt, \\ a_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) dt, \\ b_0 &:= 0, \\ b_k &:= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) dt, \quad k \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Die Funktionenreihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

wird als die *Fourier-Reihe* der Funktion f bezeichnet.

Wir haben also zuvor eingesehen, dass, wenn eine trigonometrische Reihe der Form (1) gleichmäßig gegen eine Funktion konvergiert, dies nichts anderes als die Fourier-Reihe von f sein kann.

2. *Bemerkung.* Jean Baptiste Joseph Fourier [1768-1830] war ein französischer Mathematiker und Physiker. Sein Hauptwerk enthält seine theoretischen Untersuchungen zur Wärmeleitung, in denen er die Lösungen der Wärmeleitungsgleichung in Form einer trigonometrischen Reihe darstellte.

3. *Bemerkung.* Es ist offensichtlich, dass die Fourier-Reihe einer ungeraden Funktion rein sinusförmig und die Fourier-Reihe einer geraden Funktion rein kosinusförmig ist¹.

Nun wenden wir uns der Untersuchung der Konvergenz zu. Hierbei kann es zwei Fragen geben: Die eine ist, wann die Fourier-Reihe einer gegebenen Funktion f in einem Punkt x konvergiert oder auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gleichmäßig konvergiert, und die andere, wann sie die Funktion f darstellt. Es ist wichtig zu wissen, dass es stetige Funktionen gibt, deren Fourier-Reihen nicht konvergieren. Aus Platz- und Zeitmangel werden wir uns nicht mit diesen Feinheiten beschäftigen. Es gibt viele schöne und relativ leicht verständliche Konvergenzsätze. Zunächst geben wir eine hinreichende Bedingung für die gleichmäßige Konvergenz von Fourier-Reihen an und zeigen dann, dass die Fourier-Reihe in diesem Fall tatsächlich f darstellt.

4. **Behauptung.** Sei $D(f) = [-\pi, \pi]$ und f (mindestens) zweimal stetig differenzierbar, das heißt, es existiere f'' und $f'' \in C[-\pi, \pi]$. Dann gilt für $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos(nt - \pi) dt, \\ b_n &= \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \sin(nt - \pi) dt. \end{aligned}$$

Beweis. Der Beweis der Behauptung ist völlig elementar und besteht aus einer zweimal nacheinander durchgeführten partiellen Integration. Wir zeigen dies für den Koeffizienten a_n , hieraus lässt es sich für b_n ableiten. Ich bitte darum, dass sich dies wirklich jeder überlegt. Im ersten Schritt

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(nt) dt = \frac{1}{\pi} \left[f(t) \frac{\sin(nt)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \frac{\sin(nt)}{n} dt \\ &= 0 + \frac{-1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right) dt, \end{aligned}$$

¹Warum ist das offensichtlich?

wobei wir die wohlbekanntes Identität $\sin \alpha = \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{2}\right)$ verwendet haben. Durch Wiederholung der obigen Rechnung erhalten wir:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{-1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f'(t) \cos\left(nt - \frac{\pi}{2}\right) dt = \frac{-1}{\pi n} \left[f'(t) \frac{\sin\left(nt - \frac{\pi}{2}\right)}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{-1}{\pi n} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \frac{\sin\left(nt - \frac{\pi}{2}\right)}{n} dt \\ &= 0 + \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} f''(t) \cos(nt - \pi) dt. \end{aligned}$$

□

5. *Bemerkung.* Für diese Eigenschaft der Funktion f ist es üblich, ein Symbol einzuführen. Wir sagen, dass f auf dem Intervall $[a, b]$ k -mal stetig differenzierbar ist, wenn f (mindestens) k -mal differenzierbar ist und $f^{(k)} \in C[a, b]$ gilt. In Symbolen:

$$C^k[a, b] := \left\{ f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} : D(f) = [a, b], f \text{ } k\text{-mal differenzierbar und } f^{(k)} \in C[a, b] \right\}.$$

6. *Bemerkung.* Mit vollständiger Induktion lässt sich leicht zeigen, dass, wenn $f \in C^k[-\pi, \pi]$ ist, dann gilt:

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \cos\left(nt - k \frac{\pi}{2}\right) dt, \\ b_n &= \frac{(-1)^k}{\pi n^k} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(k)}(t) \sin\left(nt - k \frac{\pi}{2}\right) dt. \end{aligned}$$

7. **Korollar.** Sei f mindestens zweimal stetig differenzierbar, d.h. $f \in C^2[-\pi, \pi]$. Dann ist ihre Fourier-Reihe gleichmäßig konvergent.

Beweis. Wir verwenden das Weierstraß-Kriterium für die gleichmäßige Konvergenz von Funktionenreihen. Aus der vorherigen Behauptung folgt, dass, wenn $f \in C^2[-\pi, \pi]$ ist,

$$|a_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| \cdot |\cos(nt - \pi)| dx \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt = \frac{D}{n^2},$$

wobei wir die abkürzende Notation $D := \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt$ eingeführt haben. Analog gilt:

$$|b_n| \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| \cdot |\sin(nt - \pi)| dt \leq \frac{1}{\pi n^2} \int_{-\pi}^{\pi} |f''(t)| dt = \frac{D}{n^2}.$$

Also

$$|a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)| \leq \frac{2D}{n^2}.$$

Da die Reihe $\sum \left(\frac{1}{n^2}\right)$ (absolut) konvergiert, folgt die gleichmäßige Konvergenz aus dem Weierstraß-Kriterium. □

8. *Bemerkung.* Basierend auf Bemerkung 6 lässt sich diese Abschätzung für den Fall $f \in C^k[-\pi, \pi]$ leicht verbessern. Durch vollständige Induktion lässt sich zeigen, dass dann mit einer geeigneten Konstante $D_k > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{D_k}{n^k}, \\ |b_n| &\leq \frac{D_k}{n^k}. \end{aligned}$$

9. *Bemerkung.* Wie in der Einleitung erwähnt, haben wir hier nicht den allgemeinstmöglichen Satz angegeben. Die gleichmäßige Konvergenz lässt sich für eine viel allgemeinere Klasse von Funktionen zeigen, zu der beispielsweise auch Polygonzüge gehören. Es lässt sich relativ leicht zeigen, dass für die obige Behauptung die Stetigkeit der zweiten Ableitung nicht erforderlich ist; ihre Riemann-Integrierbarkeit reicht aus. Genauer gesagt genügt es anzunehmen, dass $f''(x)$ mit Ausnahme von möglicherweise „einigen“ x existiert und die so erhaltene Funktion Riemann-integrierbar ist. Wir können also auch Funktionen wie $|x|$ oder $\operatorname{sgn} x$ ($x \in [-\pi, \pi]$) zulassen.

Die gleichmäßige Konvergenz haben wir für eine in der Praxis sehr wichtige Klasse von Funktionen gezeigt. Nun können wir uns der Frage zuwenden, ob die Fourier-Reihe der Funktion f tatsächlich f darstellt. Dazu müssen wir zunächst die n -te Partialsummenfolge der Fourier-Reihe in geschlossener Form darstellen.

10. Satz (Dirichlet). *Sei f 2π -periodisch, $f \in R[-\pi, \pi]$ und sei die n -te Partialsumme ihrer Fourier-Reihe mit $s_n(x)$ bezeichnet, das heißt*

$$s_n(x) = \sum_{k=0}^n (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Dann gilt

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Die Bedingungen des Satzes sind so zu verstehen, dass eine Riemann-integrierbare Funktion auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$ gegeben ist und wir sie periodisch auf die Zahlengerade fortsetzen. Die für s_n angegebene Integralformel ist formal für $t = 0$ nicht definiert, es ist jedoch leicht zu sehen, dass der Integrand stetig auf diesen Punkt fortgesetzt werden kann.

Der Beweis ist eine langwierige Anwendung einiger elementarer trigonometrischer Identitäten.

Beweis. Betrachten wir zunächst ein beliebiges Glied der Reihe, hierfür gilt:

$$\begin{aligned} a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos(kt) \cos(kx) dt + \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin(kt) \sin(kx) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) [\cos(kt) \cos(kx) + \sin(kt) \sin(kx)] dt = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos k(t-x) dt. \end{aligned}$$

Nach Definition ist

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) dt.$$

Führen wir in den obigen Integralen die Substitution $s = t - x$ durch, so ist das Ergebnis:

$$a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) \cos(ks) ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) \cos(ks) ds,$$

wobei wir bei der letzten Gleichheit ausgenutzt haben, dass f 2π -periodisch ist. Analog gilt:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x+s) ds = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+s) ds.$$

Also

$$s_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) \left[\frac{1}{2} + \cos s + \cos 2s + \cos 3s + \dots + \cos ns \right] ds = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(s+x) D_n(s) ds,$$

wobei

$$D_n(s) := \frac{1}{2} + \cos s + \cos 2s + \cos 3s + \dots + \cos ns.$$

Um den Beweis abzuschließen, müssen wir den Ausdruck $D_n(s)$ in eine geschlossene Form bringen. Dies ist eine Aufgabe auf Gymnasialniveau, vielleicht sind ihr einige schon begegnet.

Für Interessierte berechnen wir es auf zwei verschiedene Arten. Eine Lösung verwendet komplexe Zahlen. Betrachten wir die komplexe Zahl $z = \cos s + i \sin s = e^{is}$, wobei $s \neq 0$, d.h. $z \neq 1$ ist. Dann gilt:

$$D_n(s) = \Re(z^0 + z^1 + \dots + z^n) - \frac{1}{2} = \Re\left(\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} - \frac{1}{2}\right).$$

Da

$$\frac{z^{n+1} - 1}{z - 1} = \frac{e^{i(n+1)s} - 1}{e^{is} - 1} \cdot \frac{e^{-is} - 1}{e^{-is} - 1} = \frac{e^{isn} - e^{is} - e^{is(n+1)} + 1}{2 - 2 \cos s},$$

wobei wir verwendet haben, dass $\bar{z} = e^{-is}$ ist. Daher gilt:

$$\begin{aligned} D_n(s) &= \frac{\cos(ns) - \cos s - \cos(n+1)s + 1}{2 - 2\cos s} - \frac{1 - \cos s}{2 - 2\cos s} = \frac{\cos(ns) - \cos(n+1)s}{2(1 - \cos s)} \\ &= \frac{-2 \sin \frac{ns+(n+1)s}{2} \cdot \sin \frac{ns-(n+1)s}{2}}{2(1 - \cos s)} = \frac{\sin \frac{s}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) s}{1 - \cos s} = \frac{\sin \frac{s}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) s}{2 \sin^2 \frac{s}{2}} = \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) s}{2 \sin \frac{s}{2}}. \end{aligned}$$

Hier haben wir die wohlbekanntten Zusammenhänge

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \quad \text{und} \quad \cos s = 1 - 2 \sin^2 \frac{s}{2}$$

verwendet. Aus dem Zusammenhang $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ ist leicht ersichtlich, dass dieser Zusammenhang im Grenzwert auch für den Fall $s = 0$ das richtige Ergebnis liefert.

Für die elementarere Lösung benötigen wir eine Inspiration. Da wir das Endergebnis kennen, berechnen wir nicht den Ausdruck $D_n(s)$, sondern den Ausdruck $D_n(s) \sin \frac{s}{2}$. Dazu verwenden wir den wohlbekanntten Zusammenhang

$$\cos \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha + \beta) - \sin(\alpha - \beta)).$$

Somit gilt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sin \frac{s}{2} &= \frac{1}{2} \sin \frac{s}{2}, \\ \cos s \sin \frac{s}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{3s}{2} - \sin \frac{s}{2} \right), \\ \cos 2s \sin \frac{s}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sin \frac{5s}{2} - \sin \frac{3s}{2} \right), \\ &\dots \\ \cos ns \sin \frac{s}{2} &= \frac{1}{2} \left(\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) s - \sin \left(n - \frac{1}{2}\right) s \right). \end{aligned}$$

Addieren wir diese Identitäten, erhalten wir den gewünschten Zusammenhang

$$D_n(s) \sin \frac{s}{2} = \frac{1}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2}\right) s.$$

□

11. *Bemerkung.* Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet [1805-1859] ...

Wir sind schließlich beim Konvergenzsatz angelangt, den wir nun mit Leichtigkeit beweisen können.

12. **Satz.** Sei $f \in C^2(\mathbb{R})$ und f 2π -periodisch. Dann gilt für alle $x \in [-\pi, \pi]$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

das heißt, f wird durch ihre Fourier-Reihe dargestellt, und die Konvergenz ist gleichmäßig.

Beweis. Die gleichmäßige Konvergenz haben wir bereits im Korollar 7 gesehen. Wir zeigen die Darstellung. Wir beginnen den Beweis wieder mit einer elementaren Rechnung. Wenn $g(x) \equiv 1$ ist, dann gilt $a_0 = 1$, $a_n = b_n = 0$ und die Fourier-Reihe ist offensichtlich konvergent. Wenden wir Dirichlets Formel auf die konstante Partialsummenfolge mit dem Wert 1 an, so erhalten wir für die n -te Partialsumme der Fourier-Reihe der identisch 1-Funktion, dass

$$1 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Hieraus folgt offensichtlich

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2}\right) t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Untersuchen wir nun die Differenz $s_n(x) - f(x)$. Dirichlets Formel liefert:

$$s_n(x) - f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x+t) - f(x)] \frac{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{2 \sin \frac{t}{2}} dt.$$

Da die Sinusfunktion auf dem Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ konkav ist, gilt $|\sin \frac{t}{2}| \geq \frac{2}{\pi}|t|$. Verwenden wir außerdem, dass f im Punkt x differenzierbar ist, so existiert ein $K > 0$, sodass

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{t} \right| \leq K \quad \forall t \in [-\pi, \pi].$$

Also

$$\left| \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \right| \leq \left| \frac{f(x+t) - f(x)}{\frac{2}{\pi}t} \right| \leq \frac{\pi}{2}K.$$

Man kann sich leicht überlegen, dass gemäß unseren Bedingungen $g(t) = \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}}$ eine differenzierbare Funktion ist. Gemäß der Formel, die wir im ersten Schritt des Beweises von Behauptung 4 gesehen haben, gilt also:

$$|s_n(x) - f(x)| \leq \left| \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(x+t) - f(x)}{2 \sin \frac{t}{2}} \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \right| \leq \frac{C}{n + \frac{1}{2}},$$

das heißt $s_n(x) \rightarrow f(x)$. Diese letztere Abschätzung folgt im Detail aus der Identität

$$\int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt = \left[g(t) \frac{-\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{n + \frac{1}{2}} \right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} g'(t) \frac{-\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)t}{n + \frac{1}{2}} dt,$$

denn so gilt

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)t dt \right| \leq 0 + \frac{1}{n + \frac{1}{2}} \int_{-\pi}^{\pi} |g'(t)| dt,$$

wobei wir verwendet haben, dass $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi = 0$ ist. □

13. *Bemerkung.* Man kann sich leicht überlegen, dass für den Satz nicht die zweimalige stetige Differenzierbarkeit erforderlich ist, sondern Bemerkung 9 auch hier gilt.