

Das Riemann-Integral, Treppenfunktionen und numerische Quadratur

Vorlesung Analysis

25. März 2026

- 1 Wiederholung: Das Riemann-Integral
- 2 Approximation durch Treppenfunktionen
- 3 Numerische Integration (Quadraturformeln)

Zerlegung und Stützstellen

Sei $[a, b]$ ein Intervall. Eine **Zerlegung** $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ teilt $[a, b]$ in Teilintervalle $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ mit Längen $|I_k| = x_k - x_{k-1}$.

Ein **Stützstellenvektor** $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n)$ erfüllt $\xi_k \in I_k$.

Riemann-Näherungssumme

Für eine Funktion $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ definieren wir die Riemann-Summe als:

$$S(f, Z, \xi) := \sum_{k=1}^n f(\xi_k) |I_k|$$

Riemann-Integrierbarkeit: f ist Riemann-integrierbar, wenn für jede Folge von Zerlegungen mit Feinheit $|Z| \rightarrow 0$ und beliebige Stützstellen die Riemann-Summen gegen einen eindeutigen Grenzwert $\int_a^b f(x) dx$ konvergieren.

Für beschränkte Funktionen $f \in B[a, b]$ definieren wir $m_k := \inf_{x \in I_k} f(x)$ und $M_k := \sup_{x \in I_k} f(x)$.

Untersumme und Obersumme

Untersumme: $s(Z) := \sum_{k=1}^n m_k |I_k|$

Obersumme: $S(Z) := \sum_{k=1}^n M_k |I_k|$

Darboux-Integrierbarkeit

Es gilt stets $s(Z) \leq S(f, Z, \xi) \leq S(Z)$.

f ist genau dann (Riemann-)integrierbar, wenn zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Zerlegung Z existiert mit:

$$S(Z) - s(Z) < \varepsilon$$

Definition: Treppenfunktion

Eine Funktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ heißt **Treppenfunktion**, wenn es eine Zerlegung $Z = \{x_0, \dots, x_n\}$ von $[a, b]$ gibt, sodass φ auf jedem offenen Teilintervall (x_{k-1}, x_k) konstant ist.

$$\varphi(x) = c_k \quad \text{für } x \in (x_{k-1}, x_k)$$

Eigenschaften:

- Treppenfunktionen sind immer Riemann-integrierbar.
- Das Integral lässt sich trivial exakt berechnen:

$$\int_a^b \varphi(x) dx = \sum_{k=1}^n c_k (x_k - x_{k-1})$$

Satz (Approximation durch Treppenfunktionen)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion $\varphi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, sodass für die Supremumsnorm gilt:

$$\|f - \varphi\|_{\infty} = \sup_{x \in [a, b]} |f(x) - \varphi(x)| < \varepsilon$$

Bedeutung: Jede stetige Funktion lässt sich *gleichmäßig* durch Treppenfunktionen approximieren. Da der gleichmäßige Limes Riemann-integrierbarer Funktionen wieder Riemann-integrierbar ist, liefert dies einen direkten Beweis für $C[a, b] \subset R[a, b]$.

Beweis.

Sei $\varepsilon > 0$ vorgegeben. Da f auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetig ist, ist f nach dem **Satz von Heine** (Heine-Cantor) dort sogar *gleichmäßig stetig*.

Das bedeutet, es existiert ein $\delta > 0$, sodass für alle $x, y \in [a, b]$ mit $|x - y| < \delta$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Wir wählen nun eine feste Zerlegung $Z = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ des Intervalls $[a, b]$, deren Feinheit $|Z| < \delta$ erfüllt. □

Beweis: Gleichmäßige Approximation (Teil 2)

Beweis.

Wir konstruieren nun die Treppenfunktion φ . Für jedes Teilintervall $I_k = [x_{k-1}, x_k]$ definieren wir:

$$\varphi(x) := f(x_{k-1}) \quad \text{für } x \in [x_{k-1}, x_k]$$

und setzen am Randpunkt $\varphi(b) := f(b)$.

Sei nun $x \in [a, b)$ beliebig. Dann liegt x in genau einem Intervall $[x_{k-1}, x_k)$. Da $\varphi(x) = f(x_{k-1})$ und der Abstand $|x - x_{k-1}| \leq |x_k - x_{k-1}| \leq |Z| < \delta$ ist, folgt aus der gleichmäßigen Stetigkeit sofort:

$$|f(x) - \varphi(x)| = |f(x) - f(x_{k-1})| < \varepsilon$$

Da dies für alle $x \in [a, b]$ gilt (am Punkt b ist der Fehler exakt 0), ist $\|f - \varphi\|_\infty < \varepsilon$. □

Oft ist die Stammfunktion einer Funktion f nicht elementar angebar (z.B. e^{-x^2}) oder nur diskrete Messwerte sind bekannt.

Ziel: Approximiere das Integral durch eine gewichtete Summe von Funktionswerten:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \sum_{i=0}^n w_i f(x_i)$$

Wir untersuchen nun zwei elementare Bausteine (für ein einzelnes Intervall $[a, b]$ mit $h := b - a$), die in der Praxis zu „zusammengesetzten“ Quadraturformeln aneinandergereiht werden.

Die Mittelpunktsregel (Rechteckregel)

Formel

Wir approximieren die Fläche unter f durch ein Rechteck, dessen Höhe der Funktionswert in der Mitte des Intervalls ist. Sei $m := \frac{a+b}{2}$.

$$Q_M(f) := (b - a)f(m)$$

Satz: Fehlerabschätzung der Mittelpunktsregel

Sei $f \in C^2([a, b])$. Für den Fehler $E_M(f) := \int_a^b f(x)dx - Q_M(f)$ gilt:

$$|E_M(f)| \leq \frac{(b - a)^3}{24} \|f''\|_\infty$$

Beweis: Fehler der Mittelpunktsregel (Teil 1)

Beweis.

Wir entwickeln f in ein Taylorpolynom vom Grad 1 um den Entwicklungspunkt $m = \frac{a+b}{2}$:

$$f(x) = f(m) + f'(m)(x - m) + \frac{1}{2}f''(\xi_x)(x - m)^2$$

wobei ξ_x zwischen x und m liegt.

Wir integrieren diese Darstellung über $[a, b]$:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b f(m)dx + \int_a^b f'(m)(x - m)dx + \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x - m)^2 dx$$



Beweis: Fehler der Mittelpunktsregel (Teil 2)

Beweis.

Wir berechnen die Terme:

$$\textcircled{1} \int_a^b f(m) dx = f(m)(b-a) = Q_M(f).$$

$$\textcircled{2} \int_a^b (x-m) dx = \left[\frac{(x-m)^2}{2} \right]_a^b = \frac{(b-m)^2}{2} - \frac{(a-m)^2}{2} = 0, \text{ da } m \text{ exakt in der Mitte liegt.}$$

Es verbleibt nur der Restterm für den Fehler E_M :

$$E_M(f) = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2} (x-m)^2 dx$$

Abschätzung mit Beträgen:

$$|E_M(f)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \int_a^b (x-m)^2 dx$$



Beweis: Fehler der Mittelpunktsregel (Teil 3)

Beweis.

Wir werten das verbleibende Integral aus:

$$\int_a^b (x - m)^2 dx = \left[\frac{(x - m)^3}{3} \right]_a^b$$

Einsetzen der Grenzen ($b - m = \frac{b-a}{2}$ und $a - m = -\frac{b-a}{2}$):

$$= \frac{1}{3} \left(\left(\frac{b-a}{2} \right)^3 - \left(-\frac{b-a}{2} \right)^3 \right) = \frac{1}{3} \left(2 \cdot \frac{(b-a)^3}{8} \right) = \frac{(b-a)^3}{12}$$

Eingesetzt in unsere Ungleichung:

$$|E_M(f)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \cdot \frac{(b-a)^3}{12} = \frac{(b-a)^3}{24} \|f''\|_\infty$$

Formel

Wir approximieren f durch eine lineare Funktion (Sekante), die durch die Punkte $(a, f(a))$ und $(b, f(b))$ verläuft. Die Fläche ist ein Trapez:

$$Q_T(f) := \frac{b-a}{2}(f(a) + f(b))$$

Satz: Fehlerabschätzung der Trapezregel

Sei $f \in C^2([a, b])$. Für den Fehler $E_T(f) := \int_a^b f(x)dx - Q_T(f)$ gilt:

$$|E_T(f)| \leq \frac{(b-a)^3}{12} \|f''\|_\infty$$

Beweis: Fehler der Trapezregel (Teil 1)

Beweis.

Sei $p_1(x)$ das lineare Interpolationspolynom von f an den Stellen a und b . Das Integral über $p_1(x)$ ist exakt die Trapezregel: $\int_a^b p_1(x) dx = Q_T(f)$.

Aus der Theorie der Polynominterpolation kennen wir die Fehlerdarstellung für $x \in [a, b]$:

$$f(x) - p_1(x) = \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b)$$

wobei $\xi_x \in [a, b]$.

Der Quadraturfehler ist das Integral über diesen Interpolationsfehler:

$$E_T(f) = \int_a^b (f(x) - p_1(x)) dx = \int_a^b \frac{f''(\xi_x)}{2}(x-a)(x-b) dx$$



Beweis: Fehler der Trapezregel (Teil 2)

Beweis.

Wir schätzen den Betrag ab. Beachte, dass $(x - a)(b - x) \geq 0$ für $x \in [a, b]$ gilt (wir drehen das Vorzeichen von $(x - b)$ um, um den Betrag zu nehmen):

$$|E_T(f)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \int_a^b (x - a)(b - x) dx$$

Substitution: $x = a + t(b - a)$ mit $t \in [0, 1]$ und $dx = (b - a)dt$.

Dabei ist $x - a = t(b - a)$ und $b - x = b - a - t(b - a) = (1 - t)(b - a)$.

$$\begin{aligned} \int_a^b (x - a)(b - x) dx &= \int_0^1 t(b - a) \cdot (1 - t)(b - a) \cdot (b - a) dt \\ &= (b - a)^3 \int_0^1 t(1 - t) dt \end{aligned}$$

Beweis: Fehler der Trapezregel (Teil 3)

Beweis.

Wir berechnen das verbleibende Integral über t :

$$\int_0^1 (t - t^2) dt = \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$

Zusammengesetzt ergibt das den Wert des Integrals:

$$\int_a^b (x - a)(b - x) dx = \frac{(b - a)^3}{6}$$

Eingesetzt in unsere Abschätzung:

$$|E_T(f)| \leq \frac{\|f''\|_\infty}{2} \cdot \frac{(b - a)^3}{6} = \frac{(b - a)^3}{12} \|f''\|_\infty$$