Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

Bachelorstudium Lehramt Sekundarstufe (Allgemeinbildung)
Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik
Kapitel 0: Grundlagen

1. Wie sind die Begriffe *Vereinigung*, *Durchschnitt* und *Differenz* von Mengen definiert? Bestimmen Sie (durch Aufzählen ihrer Elemente) die Mengen

$$(\{ab, ba, 13, 21, ?\} \cup \{ba, 21, 9, z, yyy\}) \cap \{a, b, 1, 2, y, z, 9, 13\}\,,$$

$$(\{ab, ba, 13, 21, ?\} \cap \{ba, 21, 9, z, yyy\}) \cup \{a, b, 1, 2, y, z, 9\}\,,$$

und

$$(\{ab, ba, 13, 21, ?\} \setminus \{a, b, 13, 21\}) \cup \{z, 13\}\,.$$

Ist eine dieser drei Mengen eine Teilmenge einer anderen dieser drei Mengen?

2. Wie überprüft man, ob zwei Mengen *gleich* sind? Prüfen Sie nach, ob die folgenden Behauptungen richtig sind.

$$\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, a+1=5,\ 2b=6\} = \{(4,3)\}$$

$$\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, a+1=5,\ 2b=6\} = \{(x,u) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, x+2=6,\ 3u=9\}$$

$$\{(a,b) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, a^2=1,\ b^2=1\} =$$
$$= \{(r,1) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, r^2=1\} \cup \{(s,-1) \in \mathbb{Z}^2 \,|\, s^2=1\}$$

3. Es seien A und B Mengen. Was ist eine *Funktion* (oder *Abbildung*) von A nach B ? Was ist der *Graph* einer Funktion? Beschreiben Sie die unter a), b) und c) dargestellten Situationen durch Funktionen (geben Sie den Definitionsbereich, den Bildbereich und die Zuordnung an). Überlegen Sie, wie man diese Funktionen gut darstellen kann. Geben Sie auch die Graphen dieser Funktionen an. Wählen Sie in den Bildbereichen dieser Funktionen je ein Element und beschreiben Sie die Menge aller Urbilder dieses Elementes in Worten.

   (a) Bei einer Umfrage werden 200 Personen gefragt, welche der Farben Silber, Weiß, Blau, Grün, Rot, Schwarz sie für ihr Auto bevorzugen. Jede befragte Person nennt genau eine dieser Farben.

   (b) Nach der Umfrage in a) wird für jede Farbe die Anzahl der Personen, die sie gewählt haben, ermittelt.

   (c) Schließlich wird für jede Farbe berechnet, wieviel Prozent der befragten Personen diese Farbe bevorzugen.

4. Beschreiben Sie die unter a) und b) dargestellten Situationen durch Funktionen (geben Sie den Definitionsbereich, den Bildbereich und die Zuordnung an). Überlegen Sie, wie man diese Funktionen gut darstellen kann. Geben Sie auch die Graphen dieser Funktionen an. Wählen Sie in den Bildbereichen dieser Funktionen je ein Element und beschreiben Sie die Menge aller Urbilder dieses Elementes in Worten.

   (a) Jedem Punkt im Bezirk Schwaz wird seine „Höhe (in Metern) über dem Meer“ zugeordnet. Wie werden auf einer Karte die Mengen der Urbilder von 600, 700, ... dargestellt? Erklären Sie in diesem Zusammenhang den Unterschied zwischen einer Wanderkarte und einer Reliefkarte.

   (b) Ein Auto fährt eine Minute lang. Am Ende jeder Sekunde wird angegeben, welcher Weg (in Metern) in dieser Sekunde zurückgelegt wurde.

5. Wie überprüft man, ob zwei Funktionen gleich sind? Es seien

$$\begin{aligned}
&f : \{1,2,3,4\} \to \{5,10,17,26\}\,,\ 1 \mapsto 5\,,\ 2 \mapsto 10\,,\ 3 \mapsto 17\,,\ 4 \mapsto 26\,,\\
&g : \{1,2,3,4\} \to \mathbb{N}\,,\ x \mapsto (x+1)^2+1\,,\\
&h : \{1,2,3,4\} \to \{y^2+2y+2 \,|\, y=1,2,3,4\}\,,\\
&\qquad\qquad z \mapsto z^2+2z+2\,,\\
&k : \{1,2,3,4\} \to \mathbb{N}\,,\ \bullet \mapsto (\bullet+1)^2+1\,.
\end{aligned}$$

Überprüfen Sie für je zwei dieser Funktionen, ob sie gleich sind.

6. Was ist eine *Familie von Elementen in einer Menge M mit Indexmenge I*?
   Was ist ein *n-Tupel von Elementen in M*?
   Schreiben Sie die folgenden Funktionen in Familienschreibweise an:

$$\{1,2,3\} \to \mathbb{N}\,,\ 1 \mapsto 5\,,\ 2 \mapsto 1\,,\ 3 \mapsto 1\,,$$
$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ x \mapsto x^2 + 2\,,$$
$$\mathbb{Z} \to \mathbb{N}\,,\ x \mapsto 2\,,$$
$$\{1,2\} \to \{\text{Huber, Gruber, Müller}\}\,,\ 1 \mapsto \text{Müller}\,,\ 2 \mapsto \text{Gruber}.$$
$$\{1,2\} \to \{\text{Huber, Müller, Gruber}\}\,,\ 1 \mapsto \text{Gruber}\,,\ 2 \mapsto \text{Müller}.$$

7. Verneinen Sie jeder der folgenden Aussagen und geben Sie an (mittels Beweis und/oder Gegenbeispiel), welche der Aussagen dann richtig ist.

   (a)
   $$\forall K \subset \mathbb{R}\ \exists a \in \mathbb{R}\ (\forall x \in \mathbb{R},\ |x| \geq a\ \Rightarrow\ x \notin K)$$

   (b)
   $$\forall x \in \mathbb{R}\ \ (x \geq 0 \Rightarrow \sin x \geq 0)$$

   (c)
   $$\forall H \subset \mathbb{R}\ \exists x_0 \in \mathbb{R}\ \forall x \in \mathbb{R}\ (|x - x_0| \geq 1\ \Rightarrow\ x \in H \setminus \{x_0\})$$

   (d)
   $$\forall x \in \mathbb{R}\ \exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \forall y, z \in \mathbb{R}\ (y, z \in (x - \varepsilon, x + \varepsilon)\ \Rightarrow\ \sin(y) < \sin(z))$$

   (e)
   $$\exists \varepsilon \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in \mathbb{R}\ \ \exists y \in \mathbb{Z}\ |x - y| < \varepsilon$$

   (f) Ist der Apfel rot, dann ist er reif.

   (g)
   $$\forall p \in \mathbb{R}^+\ \exists K \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in (K, +\infty)\ \ x^2 - px + 1 > 0$$

   (h)
   $$\forall p \in \mathbb{R}^+\ \exists (K, q) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\ \forall x \in (K, +\infty)\ \ x^2 - px + q > 0$$

   (i)
   $$\exists K \in \mathbb{R}^+\ \forall p \in \mathbb{R}^+\ \exists q \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in (K, +\infty)\ \ x^2 - px + q > 0$$

   (j)
   $$\forall (p, q, K) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+\ \forall x \in (K, +\infty)\ \ x^2 - px + q > 0$$

   (k)
   $$\forall p \in \mathbb{R}^+\ \exists K \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in (K, +\infty)\ \ x \sin \frac{p}{x} > 0$$

   (l)
   $$\forall p \in \mathbb{R}^+\ \exists K \in \mathbb{R}^+\ \forall x \in (K, +\infty)\ \ \cos \sqrt{\frac{p}{x}} > 0$$

8. Was ist der *Graph einer Funktion* ? Schreiben Sie die Graphen der Funktionen

$$\{1,2,3\} \to \mathbb{N}\,,\ 1 \mapsto 0\,,\ 2 \mapsto 4\,,\ 3 \mapsto 2\,,$$
$$\mathbb{N} \to \mathbb{N}\,,\ z \mapsto z^3 + z + 1\,,$$
$$\mathbb{Z} \to \mathbb{N}\,,\ y \mapsto 7\,,$$
$$\{1,2,3,4,5,6\} \to \{Christa, Heiner, Hubert, Michael, Sergiy, Werner\}\,,$$
$$1 \mapsto Christa\,,\ 2 \mapsto Heiner\,,\ 3 \mapsto Heiner\,,$$
$$4 \mapsto Sergiy\,,\ 5 \mapsto Werner\,,\ 6 \mapsto Hubert$$

   an.

9. Berechnen Sie

$$\sum_{j=2}^{6}(j+1)\ , \quad \sum_{ab=-1}^{3} ab\ , \quad \prod_{r=2}^{3}\Big(\sum_{s=-1}^{1}(s-r)\Big)\ , \quad \sum_{n=1}^{4} 7$$

und

$$\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=1}^{4}(3i+2)\cdot(j+1) \quad .$$

10. Schreiben Sie das Folgende mit Hilfe des Summenzeichens oder Produktzeichens kürzer an:

$$-9+(-6)+(-3)+0+3+6+9\,,\ 2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdot 10\cdot 12\,,$$

$$3\cdot 4+3\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 4+4\cdot 5+4\cdot 6+5\cdot 4+5\cdot 5+5\cdot 6$$

11. Was bedeutet es, eine Behauptung *durch Induktion zu beweisen*? Beweisen Sie durch Induktion:

(a) Für jede positive ganze Zahl n gilt

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

(b) Für jede positive ganze Zahl $n \geq 3$ gilt

$$2n^2 > (n+1)^2.$$

(c)

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\ldots+\frac{1}{n\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

(d)

$$1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

(e)

$$1\cdot 2\cdot 3+2\cdot 3\cdot 4+\ldots+n(n+1)(n+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

(f)

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+\ldots+n\cdot n! = (n+1)!-1$$

(g)

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j} = 2^n$$

(h)

$$\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$

(i)

$$\sum_{l=0}^{n}(-1)^l\binom{n}{l} = \,?$$

(j)

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a^{n-i}b^i$$

12. Gibt es hier eine Regel? Falls ja, dann formulieren Sie die und beweisen Sie.

(a)

$$\begin{aligned} 1 &= 1\\ 1+3 &= 4\\ 1+3+5 &= 9\\ 1+3+5+7 &= 16 \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \\ 1+8 &= 9 \\ 1+8+27 &= 36 \\ 1+8+27+64 &= 100 \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{array}{rcl} 1+1+1 & = & 3 \\ 1+2+3+2+1 & = & 9 \\ 1+3+6+7+6+3+1 & = & 27 \\ 1+4+10+16+19+16+10+4+1 & = & 81 \end{array}$$

13. Seien A_1, A_2, ... Behauptungen. Für welches n folgt dass A_n wahr oder falsch ist?
    (a) A_{10} ist wahr. Falls A_n wahr ist, dann ist A_{n+1} auch wahr.
    (b) A_{100} ist falsch. Falls A_n wahr ist, dann ist A_{n+1} auch wahr.
    (c) A_1 ist wahr. Falls A_n falsch ist, dann ist A_{n-1} auch falsch.
    (d) A_1 ist wahr. Falls A_n wahr ist, dann ist A_{n-1} auch wahr.
    (e) A_2 ist wahr. Falls A_n wahr ist, dann ist A_{2n} auch wahr.
    (f) A_1 ist wahr. Falls $A_1, A_2, \ldots, A_n$ alle wahr sind, dann ist A_{n+1} auch wahr.

14. Was ist ein *kommutativer Ring*, was ist ein *Körper*? Beweisen Sie: Wenn a und b Elemente eines kommutativen Rings sind, dann ist
    $$a^2 + 2ab + b^2 = (a+b)^2, \;\; a^2 - b^2 = (a+b)(a-b).$$
    Berechnen Sie „im Kopf“ $301^2 - 299^2$.

    Zeigen Sie durch Induktion über n: Wenn a und b Elemente eines kommutativen Rings sind und n eine positive natürliche Zahl ist, dann ist
    $$a^n - b^n = (a-b) \cdot \Big(\sum_{i=0}^{n-1} a^{n-1-i} b^i\Big).$$
    Was ist wenn der Ring nicht kommutativ ist?

15. Berechnen Sie die multiplikativen Inversen der folgenden komplexen Zahlen:
    $$5+2\mathrm{i},\; 7-\mathrm{i},\; 1+2\mathrm{i}$$

16. Lösen Sie die folgenden Gleichungen „modulo 11“(das heißt in $\mathbb{Z}_{11}$):
    $$6x = 2,\; 2x+4 = 9,\; 3x-9 = 5,\; 7x = 1$$

17. Welche der folgenden Gleichungen sind „modulo 12“(das heißt in $\mathbb{Z}_{12}$) lösbar? Geben Sie gegebenenfalls eine Lösung an:
    $$6x = 2,\; 2x+4 = 9,\; 3x-9 = 5,\; 7x = 1$$

18. Sei K eine Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $q \neq 1$ ein Element von K. Zeigen Sie:
    $$\sum_{i=0}^{n} q^i = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}.$$

19. Wir betrachten den Vektorraum $\mathbb{R}^3$.
    (a) Schreiben Sie ein beliebiges Element $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ als Summe von skalaren Vielfachen (=Linearkombinationen) der Vektoren $e_1 = (1,0,0)$, $e_2 = (0,1,0)$ und $e_3 = (0,0,1)$.
    (b) Schreiben Sie die Vektoren $(5,2,3)$, $(2,-4,1)$ und $(0,-3,0)$ als Summe von skalaren Vielfachen (=Linearkombinationen) der Vektoren $a_1 = (1,1,0)$, $a_2 = (0,1,1)$ und $a_3 = (0,0,2)$.

20. Es sei K Teilkörper eines Körpers L und V ein L-Vektorraum. Ist dann $x_1, \ldots, x_n$ ein Erzeugendensystem von V als L-Vektorraum und $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ ein Erzeugendensystem von L, aufgefasst als K-Vektorraum, so bilden die Produkte $\alpha_i x_j$ mit $i = 1, \ldots, m$ und $j = 1, \ldots, n$ ein Erzeugendensystem von V als K-Vektorraum.

21. Wir betrachten den $\mathbb{R}$-Vektorraum

$$\mathbb{P} = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,;\, \exists\, \alpha_0, \ldots, \alpha_n \,\forall\, x \in \mathbb{R} \colon f(x) = \sum_{j=0}^{n} \alpha_j x^j \}.$$

Finden Sie ein Erzeugendensystem für $\mathbb{P}$.

22. Es sei K ein Körper und V ein endlich erzeugter K-Vektorraum. Zeigen Sie, daß sich jedes beliebige Erzeugendensystem von V zu einem endlichen Erzeugendensystem verkleinern lässt.

23. Wir betrachten $\mathbb{R}^3$ als $\mathbb{R}$-Vektorraum. Überprüfen Sie die folgenden Systeme von Vektoren auf lineare Abhängigkeit bzw. lineare Unabhängigkeit.

    (a) $(1, 0, -1)$, $(1, 2, 1)$, $(0, -3, 2)$,

    (b) $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 0)$,

    (c) $(1, 9, 7)$, $(2, 3, 4)$, $(9, 7, 6)$, $(6, 6, 6)$.

24. Sei K ein Körper, V ein K-Vektorraum und x_1, $x_2 \in V$. Zeigen Sie, daß x_1, x_2 genau dann linear abhängig sind, wenn einer der beiden Vektoren ein skalares Vielfaches des anderen ist.

25. Welche der folgenden Systeme von Vektoren sind linear unabhängig?

    (a) In $\mathbb{R}^3$:

    i. $(1, 3, 0)$, $(2, -3, 4)$, $(3, 0, 4)$.

    ii. $(1, 2, 3)$, $(2, 3, 1)$, $(3, 1, 2)$.

    (b) In $\mathbb{R}^{\mathbb{R}} = \{ f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R} \}$:

    i. f, g, h wobei $f(x) = 5x^2 + x + 1$, $g(x) = 2x + 3$ und $h(x) = x^2 - 1$.

    ii. p, q, r wobei $p(x) = \cos^2 x$, $q(x) = \cos(2x)$ und $r(x) = 1$.

26. Geben Sie ein System von vier linear unabhängigen Vektoren in $\mathbb{R}^3$ aufgefasst als $\mathbb{Q}$-Vektorraum an.

27. Ergänzen Sie das linear unabhängige System $(1, 0, 1, 0)$, $(1, 1, 1, 1)$ mit Vektoren aus dem Erzeugendensystem $(1, 1, 0, 0)$, $(0, 1, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 1)$, $(-1, 0, 0, 1)$ zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$.

28. Betrachten Sie die Untervektorräume $U_1 := \langle (1, 1, 0), (0, 1, 1) \rangle$ und $U_2 := \langle (1, 0, 1) \rangle$ des $\mathbb{R}^3$. Zeigen Sie, daß $U_1 + U_2 = \mathbb{R}^3$ und $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ gilt.

29. Sei V ein Vektorraum und M eine Menge. Für $f \in V^M$ sei $\mathrm{Tr}(f) := \{ x \in M \,;\, f(x) \neq 0 \}$ der *Träger* von f. Sei E die Menge aller $f \in V^M$ für die $\mathrm{Tr}(f)$ endlich ist.

    (a) Zeigen Sie, daß $E \subseteq V^M$ ein Untervektorraum ist.

    (b) Sei $V = K$, K ein Körper, aufgefasst als Vektorraum über sich selbst. Für $x \in M$ sei $e_x \in V^M$ definiert durch

    $$e_x(y) = \begin{cases} 1 & \text{falls } y = x, \\ 0 & \text{falls } y \in M \backslash \{x\}. \end{cases}$$

    Zeigen Sie, daß $\{ e_x \,;\, x \in M \}$ eine Basis von E ist.

30. Berechnen Sie folgende (reelle) Matrizenprodukte:

(a)

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}=? \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}=?$$

$$\begin{pmatrix}5 & 2\\3 & 4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=? \qquad \begin{pmatrix}2 & 2\\2 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-2\\2\end{pmatrix}=?$$

(b)

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}=? \qquad \begin{pmatrix}3 & 5\\6 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 1\\-3 & 2\end{pmatrix}=?$$

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\2 & 1 & 2\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & -1\\2 & -1 & 1\\1 & 0 & 1\end{pmatrix}=? \qquad \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\2 & 4 & 6\\3 & 6 & 9\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1 & -2 & -4\\-1 & -2 & -4\\1 & 2 & 4\end{pmatrix}=?$$

(c)

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3 & 1\\-1 & 1 & 0\\1 & 2 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\0 & 1 & 2\\3 & 1 & 1\end{pmatrix}=?$$

31. Berechnen Sie folgende (reellen) Matrizenpotenze:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\3 & 1 & 0\\0 & 1 & 2\end{pmatrix}^2=? \qquad \begin{pmatrix}2 & 1\\1 & 3\end{pmatrix}^3=? \qquad \begin{pmatrix}3 & 2\\-4 & -2\end{pmatrix}^5=?$$

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\-1 & 0\end{pmatrix}^n=? \qquad \begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}^n=? \qquad \begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\\sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}^n=?$$

32. Sei V ein Vektorraum, $p_1,\, p_2\colon V\to V$ lineare Abbildungen sodaß

(a) $p_1+p_2=\mathrm{id}_V$ (b) $p_1\circ p_1=p_1$ (c) $p_2\circ p_2=p_2$ (d) $p_1\circ p_2=0=p_2\circ p_1$

gelten. Zeigen Sie:

(a) $V=\operatorname{Im} p_1\oplus\operatorname{Im} p_2$.

(b) $\operatorname{Im} p_1=\operatorname{Ker} p_2$ und $\operatorname{Im} p_2=\operatorname{Ker} p_1$.

33. Finden Sie eine Projektion $p\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{Im} p=\langle(1,1)\rangle$.

34. Es sei $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$. Berechnen Sie ${}_XM_X(f)$ für $X=(e_1,e_2)$ und ${}_XM_Y(f)$ für $X=(e_1,e_2)$, $Y=(e_2,e_1)$.

35. Wählen Sie in den angegebenen K-Vektorräumen V eine Basis X und bestimmen Sie zu den linearen Abbildungen $f\colon V\to V$ jeweils die zugehörige Matrix ${}_XM_X(f)$.

(a) $V=\mathbb{R}^2$, $K=\mathbb{R}$, $f=$ Drehung um 90° im mathematisch positiven Sinn.

(b) $V=\mathbb{R}^2$, $K=\mathbb{R}$, $f=$ Spiegelung an der Geraden $y=x$.

(c) $V=\mathbb{Q}(\sqrt{2})$, $K=\mathbb{Q}$, $f=$ Multiplikation mit $\alpha+\beta\sqrt{2}$ wobei $\alpha,\,\beta\in\mathbb{Q}$.

36. Sei $f\colon\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(a_1,a_2)=(2a_2,a_1/2)$. Wir fixieren zwei Basen $X=(x_1,x_2)$ und $Y=(y_1,y_2)$ mit $x_1=(0,1)$, $x_2=(1,1)$, $y_1=(1,0)$ und $y_2=(-1,1)$ in $\mathbb{R}^2$.

(a) Bestimmen Sie ${}_XM_Y(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$, ${}_YM_X(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$, ${}_XM_X(f)$ und ${}_YM_Y(f)$.

(b) Zeigen Sie, daß ${}_XM_X(f)={}_YM_X(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})\cdot{}_YM_Y(f)\cdot{}_XM_Y(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$ gilt.

37. Zeigen Sie durch explizites Nachrechnen, daß die Matrizenmultiplikation assoziativ ist.

38. Bestimmen Sie den Rang folgender Matrizen.

$$a.\ \begin{pmatrix} 0 & 4 & 10 & 1 \\ 4 & 8 & 18 & 7 \\ 10 & 18 & 40 & 17 \\ 1 & 7 & 17 & 3 \end{pmatrix} \qquad b.\ \begin{pmatrix} 75 & 0 & 116 & 39 & 0 \\ 171 & -69 & 402 & 123 & 45 \\ 301 & 0 & 87 & -417 & -169 \\ 114 & -46 & 268 & 82 & 30 \end{pmatrix}$$

$$c.\ \begin{pmatrix} 2 & 1 & 11 & 2 \\ 1 & 0 & 4 & -1 \\ 11 & 4 & 56 & 5 \\ 2 & -2 & 5 & -6 \end{pmatrix} \qquad d.\ \begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$$

39. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme.

$$a.\ \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 & = -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 & = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 & = 1 \end{cases} \qquad b.\ \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 & = 2 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 5 \\ x_1 + x_2 + 5x_3 & = -7 \\ 2x_1 + 3x_2 - 3x_3 & = 14 \end{cases}$$

$$c.\ \begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = 3 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 & = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 & = 3 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 & = -6 \end{cases} \qquad d.\ \begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 & = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 & = 0 \\ 3x_1 - 5x_2 + 4x_3 & = 0 \\ x_1 + 17x_2 + 4x_3 & = 0 \end{cases}$$

40. Berechnen Sie den Zeilenrang der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in K^{3\times 4}$$

jeweils für die Körper $K = \mathbb{Q}$ und $K = \mathbb{Z}_5$.

41. Prüfen Sie, ob die folgenden Linearformen $\varphi_i\colon \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}$ ein linear unabhängiges System in $(\mathbb{R}^5)^\star$ bilden:

$$\begin{aligned} \varphi_1(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) &= \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5, \\ \varphi_2(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) &= \alpha_1 + 2\alpha_2 + 3\alpha_3 + 4\alpha_4 + 5\alpha_5, \\ \varphi_3(\alpha_1, \ldots, \alpha_5) &= \alpha_1 - 2\alpha_2. \end{aligned}$$

42. Es sei V ein K-Vektorraum. Wir betrachten sie Evaluationsabbildung $\mathrm{ev}\colon V \to (V^\star)^\star$ definiert per $\mathrm{ev}(x)(\varphi) = \varphi(x)$ für $x \in V$ und $\varphi \in V^\star$. Zeigen Sie, daß ev linear und injektiv ist.

43. Für einen Körper K und ein $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir K^n als K-Vektorraum. Für $1 \leqslant k \leqslant n$ sei $p_k\colon K^n \to K$ jeweils die Projektion auf die k-te Koordinate. Zeigen Sie, daß $(p_1, \ldots, p_n)$ eine Basis des Dualraums $(K^n)^\star$ bildet und zwar gerade die zur kanonischen Basis aus Einheitsvektoren $(e_1, \ldots, e_n)$ duale Basis.

44. Bestimmen Sie die zur Basis $B = ((0,1,1),(1,0,1),(1,1,0))$ des $\mathbb{R}^3$ duale Basis.

45. Für n, $m \in \mathbb{N}$ sei $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gegeben durch $f(x) = Ax$ mit $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $A = (a_{i,j})_{1\leqslant i\leqslant m,\, 1\leqslant j\leqslant n}$. Wir identifizieren $(\mathbb{R}^m)^\star \cong \mathbb{R}^m$ und $(\mathbb{R}^n)^\star \cong \mathbb{R}^n$, d.h., in $\mathbb{R}^k$, $k = n, m$, wählen wir die Basis aus Einheitsvektoren und nehmen als Isomorphismus gerade diejenige Abbildung welche diese Basis auf die dazu duale Basis schickt. Zeigen Sie, daß $f^\star\colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ durch $f^\star(x) = A^{\mathrm{T}}x$ gegeben ist wobei $A^{\mathrm{T}} = (a_{i,j})_{1\leqslant j\leqslant n,\, 1\leqslant i\leqslant m}$.

46. Lösen Sie aus Beutelpacher die Aufgaben 7/1,2,3,4,7.

47. Lösen Sie aus Beutelpacher die Aufgaben 8/1,2,3,4,6,7,10.