Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

Bachelorstudium Lehramt Sekundarstufe (Allgemeinbildung)
Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik
Nachklausur 2

Sie haben 90 Minuten zum arbeiten, dürfen nichts benutzen. Jede Aufgabe ist 10 Punkte wert.

1. Berechnen Sie:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}^{2017} = ?$$

2. Sei $V = \mathbb{R}^3$, $K = \mathbb{R}$, $f =$ orthogonale Projektion auf der vom Vektor $(1, 2, 1)$ aufgespannten Geraden. Geben Sie eine Basis in V und die zu f gehörige Matrix an.

3. Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ gegeben durch $f(a_1, a_2) = (3a_2, a_1/4)$. Wir fixieren zwei Basen $X = (x_1, x_2)$ und $Y = (y_1, y_2)$ mit $x_1 = (0, 1)$, $x_2 = (2, 2)$, $y_1 = (1, 0)$ und $y_2 = (-3, 3)$ in $\mathbb{R}^2$. Bestimmen Sie ${}_XM_Y(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$, ${}_YM_X(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^2})$, ${}_XM_X(f)$ und ${}_YM_Y(f)$.

4. Sei $\mathcal{P}_n =$ reelle Polynome vom Grad höchstens n und betrachten Sie die linare Abbildung $f : \mathcal{P}_3 \to \mathcal{P}_4$, $(f(p))(x) := p(x) \cdot (5x - 9)$. Wählen Sie geeignete Basen und geben Sie eine Matrizendarstellung dieser Abbildung an.

5. Bestimmen Sie die zur Basis $B = ((0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0))$ des $\mathbb{R}^3$ duale Basis.

6. Sei $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $f(v) = Av$ mit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 6 & 2 & 1 \\ -1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$
Bestimmen Sie $\ker f$, das Bild von f, rang A und $\mathbb{R}^4/\ker f$.

7. Bestimmen Sie die Eigenwerte und einige zugehörige Eigenvektoren der Matrix
$$M = \begin{pmatrix} 3 & 4 & -3 \\ 2 & 7 & -4 \\ 3 & 9 & -5 \end{pmatrix}.$$

8. Seien $A, B \in K^{n \times n}$ zwei Matrizen. Zeigen Sie:
$$(AB)^T = B^T A^T.$$