Proseminar Lineare Algebra

WS 2016/17

Bachelorstudium Lehramt Sekundarstufe (Allgemeinbildung)
Lehramtsstudium Unterrichtsfach Mathematik
Klausur 1

Sie haben 110 Minuten zum arbeiten, dürfen alles benutzen. Sie arbeiten in Paaren, aber jeder von Ihnen gibt eine eigene Lösung ab. Jede Aufgabe ist 10 Punkte wert.

1. Verneinen Sie folgende Aussage und geben Sie an (mittels Beweis und/oder Gegenbeispiel), ob die Aussage oder das Gegenteil richtig ist:
$$\exists K \in \mathbb{R}^+ \ \forall p \in \mathbb{R}^+ \ \exists q \in \mathbb{R} \exists r \in \mathbb{R}^+ \ \forall x \in [K, +\infty[\ \ px^2 + qx + r > 0.$$
2. Gibt es hier eine Regel? Falls ja, dann formulieren Sie die und beweisen Sie.
$$\begin{aligned} 1 &= 0 + 1 \\ 2 + 3 + 4 &= 1 + 8 \\ 5 + 6 + 7 + 8 + 9 &= 8 + 27 \\ 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 &= 27 + 64 \end{aligned}$$
3. Finden Sie eine allgemeine Formel und beweisen Sie!
$$1 + 9 + 25 + \ldots + (2n-1)^2 = ?$$
4. Lösen Sie die Gleichung $7x = 3$ in Z_{12}, $\mathbb{Z}_{13}$ und $\mathbb{Z}_{14}$.
5. Sei K ein körper und V ein K-Vektorraum. Zeigen Sie, dass falls für $\lambda \in K$ und $v \in V$ es gilt $\lambda \cdot v = 0$, dann entweder $\lambda = 0$, oder $v = 0$.
6. Sind folgende Systeme von Vektoren linear unabhängig in $\mathbb{R}^3$ und in $\mathbb{Z}_3^3$?
$$(2, 1, 0),\ (1, 1, 1),\ (0, 2, 1)$$
7. Welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ist ein Vektorraum?
$$U = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 = x_2 = \ldots = x_n\}$$
$$V = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1 = 1\}$$
$$W\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \ : \ x_1^2 = x_2^2\}$$
8. Sei V die Menge aller unendliche Folgen $(a_1, a_2, a_3, \ldots)$ reeller Zahlen mit der Eigenschaft $a_i = a_{i-1} + a_{i-2}$ für $i \geq 3$. Zeigen Sie dass V ein Vektorraum ist und geben Sie eine Basis von V an.
9. Geben Sie drei verschiedene Basen von $\mathbb{Z}_5^3$ an.